

六次 PH 曲线 G^2 Hermite 插值

王 慧¹, 朱春钢¹, 李彩云²

(1. 大连理工大学数学科学学院, 辽宁 大连 116024;

2. 大连理工大学盘锦校区基础教学部, 辽宁 盘锦 124221)

摘 要: 以其在弧长计算与等距线表示上的优势, PH 曲线成为近年来计算机辅助几何设计研究的焦点问题之一。为此讨论了六次 PH 曲线的 G^2 Hermite 插值问题。在指定自由参数下, 对两类六次 PH 曲线分别进行复分析曲线求解, 得到满足 G^2 插值条件的六次 PH 曲线和控制顶点。通过弧长、能量积分、绝对旋转数的衡量, 选取较好的插值曲线。进一步, 讨论了用六次 PH 曲线 G^2 Hermite 插值逼近 90° 和 67° 圆弧的问题。在同一个自由参数下, 选择插值最好的曲线, 可实现六次 C^1 Hermite 插值逼近圆弧的效果, 且逼近 90° 圆弧时, 优于五次 G^2 Hermite 插值逼近的 PH 曲线, 而逼近 67° 圆弧时, 与最好的五次 PH 曲线达到的效果几乎相同。

关 键 词: PH 曲线; G^2 Hermite 插值; 圆弧

中图分类号: TP 391

DOI: 10.11996/JGj.2095-302X.2016020155

文献标识码: A

文章编号: 2095-302X(2016)02-0155-11

G^2 Hermite Interpolation by Pythagorean Hodograph of Degree Six

Wang Hui¹, Zhu Chungang¹, Li Caiyun²

(1. School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian Liaoning 116024, China;

2. School of Science, Dalian University of Technology, Panjin Liaoning 124221, China)

Abstract: By the advantages of computing arcs and representing offsets, study of pythagorean hodograph curves is one of the hot topics in recent years. In this paper, G^2 Hermite interpolation by sextic PH curves is studied. Sextic PH curves can be classified into two types and the interpolation problem can be resolved to get the control points with some free parameter in complex representation. With the analysis of arc-length, bending energy and absolute rotation number, the better interpolation curves are selected. Moreover, the sextic PH G^2 Hermite interpolation is applied to approximate the 90° and 67° arcs. The best approximating curves can solve C^1 Hermite interpolation by the PH sextics. And the best curves' performance is better than the quintic G^2 Hermite interpolation curves when approximating the 90° arc, and is almost same as the latter's best curve when approximating the 67° arc.

Keywords: PH curve; G^2 Hermite interpolation; arc

1990年, Farouki和Sakkalis^[1-2]提出一种速端曲线模长为多项式参数曲线的 (Pythagorean

hodographs, PH) 曲线。这种曲线克服了一般参数曲线的一些缺点, 具有良好的性质, 如弧长是原参数

收稿日期: 2015-09-24; 定稿日期: 2015-10-09

基金项目: 国家自然科学基金项目(11271060, 11290143, 11401077); 民用飞机专项项目(MJ-F-2012-04); 中央基本科研业务费资助项目(DUT16LK38); 辽宁省高等学校优秀人才支持计划项目(LJQ2014010)

作者简介: 王 慧(1990-), 女, 吉林吉林人, 博士研究生。主要研究方向为计算几何。E-mail: wanghui21301062@mail.dlut.edu.cn

通讯作者: 朱春钢(1977-), 男, 北京人, 教授, 博士, 博士生导师。主要研究方向为计算几何。E-mail: czhu@dlut.edu.cn

的多项式函数、等距线可以用精确的有理形式表示等, 这些优点为数控加工和路径规划提供了方便。由于在几何与工业设计上的广泛应用, 导致PH曲线的理论分析和应用性研究成为近些年来计算机辅助几何设计 (computer aided geometric design, CAGD) 研究的焦点之一, 其中PH曲线插值是一个重要研究内容。

PH曲线插值一般分为Hermite插值和样条插值2种形式。在Hermite插值的研究中, 可分为参数连续(C^i , i 阶)和几何连续(G^j , j 阶)Hermite插值。Meek和Walton^[3]研究了一般的三次参数曲线的 G^1 Hermite插值。1995年, Farouki和Neff^[4]利用复分析的方法求解五次PH曲线的 C^1 Hermite插值, 在产生的4条满足Hermite条件的曲线中, 利用计算旋转数来选择最优解。文献[5]采用速度参数化的方法用凸五次PH曲线求解 C^1 Hermite插值问题。 C^1 Hermite插值需用五次PH曲线解决文献[4], C^2 Hermite插值需用九次PH曲线有效解决文献[6], 一般地, C^k Hermite插值可以用 $4k+1$ 次PH曲线解决文献[7]。五次及五次以上PH曲线可以解决 G^2 Hermite问题, 所以Jüttler^[8]采用了七次PH曲线解决 C^1 和 C^2 的 G^2 Hermite插值问题。2002年, Walton和Meek^[9]对 G^2 Hermite插值问题分别构造了“C”和“S”形状的五次过渡PH曲线。陈国栋和王国瑾^[10]用复形式表示, 研究了五次PH曲线的 G^2 Hermite插值求解。杨平和汪国昭^[11-12]用同伦算法研究了 C^3 连续的七次PH样条曲线和闭曲线插值问题。文献[13]用一种三次PH曲线逼近代数曲线, 且逼近曲线具有 G^1 连续性。文献[14-15]介绍了三次、五次、七次PH曲线控制多边形几何性质, 文献[16-17]介绍了四次PH曲线控制多边形的特点。2015年, Farouki等^[18]给出了两种判别三次和五次PH曲线的方法。由于PH曲线具有良好的几何性质, 近年来, 采用PH曲线对圆弧进行逼近也成为研究的热点问题。张伟红等^[19]对圆弧进行了 C^1 五次PH曲线等弧长逼近。2014年, Farouki^[20]在 G^2 Hermite插值条件下, 利用具有单峰曲率特点的五次和能微调曲率的七次PH曲线构造了圆直角。

从以上研究发现, 绝大多数都是基于奇次PH曲线的研究, 主要原因是偶次PH曲线是非正则曲线会存在奇异点。方林聪和汪国昭^[21]首次研究了六次PH曲线的 C^1 Hermite插值问题, 并将曲线分成两类讨论, 通过自由参数的控制, 构造了六次PH曲线。在实际应用中, 有对已知型值点采用两端点的位矢、单位切矢和有向曲率构造Hermite插值的需要, 在现有的 G^2 Hermite插值和六次PH曲线的分析理论

上, 本文研究了六次PH曲线的 G^2 Hermite插值问题。并从复分析的角度, 对自由参数进行选取, 避免了六次PH曲线出现奇异点的情况, 从而构造了两类情况下六条不同的六次PH曲线。利用弧长、能量积分、绝对旋转数等度量标准, 选择较好的插值曲线。对比满足 G^2 Hermite插值条件的六次PH曲线插值逼近圆弧的6个结果, 得到最好的两条六次PH曲线。同时对比五次PH曲线 G^2 Hermite插值逼近圆弧和六次PH曲线 C^1 Hermite插值逼近圆弧的研究发现, 90° 圆弧的六次PH曲线里, 式(18)的 G^2 Hermite插值逼近效果最好, 对于 67° 圆弧, 最好的六次、五次 G^2 Hermite插值以及六次 C^1 Hermite插值PH曲线的逼近效果几乎相同。

1 六次 PH 曲线

1990年, Farouki和Sakkalis^[1]定义了PH曲线并给出其相关性质。Farouki^[2]在2008年又从代数与几何的角度, 总结了之前对平面PH曲线和空间PH曲线的研究工作。有关PH曲线的定义和相关定理介绍如下(其中黑斜体字母表示复变量):

定义 1^[1]. 平面多项式参数曲线 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ 称为 PH 曲线, 如果存在多项式 $\sigma(t)$, 使得 $x^2(t) + y^2(t) = \sigma^2(t)$ 。

一条平面参数曲线 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ 的复表示为 $\mathbf{r}(t) = x(t) + iy(t)$ 。

定理 1^[1]. 平面参数曲线 $\mathbf{r}(t) = x(t) + iy(t)$ 是PH曲线的充要条件, 其为:

$$x'(t) = w(t)[u^2(t) - v^2(t)], \quad y'(t) = 2w(t)u(t)v(t)$$

其中, $w(t), u(t), v(t)$ 为非零实系数多项式, $u(t)$ 与 $v(t)$ 不同时为常数。

由定理1可以得到如下等价定理:

定理 2^[2]. 平面参数曲线 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ 是PH曲线的充要条件, 为 $\mathbf{r}(t)$ 的速端曲线:

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t) + iy'(t) = w(t)\mathbf{Q}^2(t)$$

其中, $\mathbf{Q}(t) = u(t) + iv(t)$ 。

设平面 n 次 Bézier 曲线 $\mathbf{r}(t)$ 的控制顶点记为 $\mathbf{P}_j, j = 0, \dots, n$, 控制顶点的一阶向前差分为 $\Delta \mathbf{P}_j = \mathbf{P}_{j+1} - \mathbf{P}_j$, 则 n 次 Bézier 曲线 $\mathbf{r}(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{P}_j B_j^n(t)$ 的速端曲线 $\mathbf{r}'(t)$ 可以表示为:

$$\mathbf{r}'(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} \Delta \mathbf{P}_j B_j^{n-1}(t)$$

其中, $B_j^n(t) = \frac{n!}{j!(n-j)!} (1-t)^{n-j} t^j$ 为 n 次 Bernstein 多项

式, $j=0, \dots, n, t \in [0, 1]$ 。

定理 3^[2]. 平面 n 次 Bézier 曲线 $\mathbf{r}(t)$ 是 PH 曲线的充要条件, 为 $\mathbf{r}(t)$ 的速端曲线:

$$\mathbf{r}'(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} \Delta P_j B_j^{n-1}(t) = w(t) \mathbf{Q}^2(t)$$

其中, $w(t)$ 为实系数多项式, $\mathbf{Q}(t)$ 为复系数多项式。

对于六次 PH 曲线 $\mathbf{r}(t) = \sum_{j=0}^6 P_j B_j^6(t)$, $t \in [0, 1]$ 其速端曲线可以表示为:

$$\mathbf{r}'(t) = 6 \sum_{j=0}^5 \Delta P_j B_j^5(t) = w(t) \mathbf{Q}^2(t), t \in [0, 1]$$

其中, 实系数多项式 $w(t)$ 和复系数多项式 $\mathbf{Q}(t)$ 也表示为 Bézier 形式。

引理 4^[2]. n 次 PH 曲线 $\mathbf{r}(t) = x(t) + iy(t)$ 满足的次数关系是 $n = n_1 + 2n_2 + 1$, 其中 $n_1 = \text{deg}(w)$, $n_2 = \max[\text{deg}(u), \text{deg}(v)]$ 。

当 $n=6$ 时, n_1, n_2 取值有 2 种情况: $n_1=3, n_2=1$ 或 $n_1=1, n_2=2$, 对应的 2 类曲线分别为:

(1) $w(t) = w_0 B_0^3(t) + w_1 B_1^3(t) + w_2 B_2^3(t) + B_3^3(t)$, $\mathbf{Q}(t) = u_0 B_0^1(t) + u_1 B_1^1(t)$, 控制顶点与系数的关系为:

$$\begin{cases} P_1 = P_0 + \frac{1}{6} w_0 u_0^2 \\ P_2 = P_1 + \frac{1}{10} u_0^2 w_1 + \frac{1}{15} u_0 u_1 w_0 \\ P_3 = P_2 + \frac{1}{20} u_0^2 w_2 + \frac{1}{10} u_0 u_1 w_1 + \frac{1}{60} u_1^2 w_0 \\ P_4 = P_3 + \frac{1}{10} u_0 u_1 w_2 + \frac{1}{20} u_1^2 w_1 + \frac{1}{60} u_0^2 \\ P_5 = P_4 + \frac{1}{10} u_1^2 w_2 + \frac{1}{15} u_0 u_1 \\ P_6 = P_5 + \frac{1}{6} u_1^2 \end{cases} \quad (1)$$

其中, $w_i (i=0, 1, 2)$ 为待定实系数, $u_j (j=0, 1)$ 为待定复系数。

(2) $w(t) = w_0 B_0^2(t) + B_1^2(t)$, $\mathbf{Q}(t) = u_0 B_0^2(t) + u_1 B_1^2(t) + u_2 B_2^2(t)$, 控制顶点与系数的关系为:

$$\begin{cases} P_1 = P_0 + \frac{1}{6} w_0 u_0^2 \\ P_2 = P_1 + \frac{2}{15} u_0 u_1 w_0 + \frac{1}{30} u_0^2 \\ P_3 = P_2 + \frac{1}{30} u_0 u_2 w_0 + \frac{1}{15} u_1^2 w_0 + \frac{1}{15} u_0 u_1 \\ P_4 = P_3 + \frac{1}{15} u_0 u_1 w_0 + \frac{1}{30} u_0 u_2 + \frac{1}{15} u_1^2 \\ P_5 = P_4 + \frac{1}{30} u_2^2 w_0 + \frac{2}{15} u_1 u_2 \\ P_6 = P_5 + \frac{1}{6} u_2^2 \end{cases} \quad (2)$$

其中, w_0 为待定实系数, $u_i (i=0, 1, 2)$ 为待定复系数。

易知, $\mathbf{r}'(t)$ 的奇异点与实多项式 $w(t)$ 的根对应。由代数基本定理可知, 第一类六次 PH 曲线上可能存在 3 个奇异点, 第二类六次 PH 曲线存在一个奇异点, 使其为非正则曲线。

2 六次 PH 曲线的 G^2 Hermite 插值

定义 2^[6]. 六次 PH 曲线 $\mathbf{r}(t) = \sum_{j=0}^6 P_j B_j^6(t)$, $t \in [0, 1]$, 若满足:

$$\mathbf{r}(0) = P_0, \mathbf{r}(1) = P_6, \frac{\mathbf{r}'(i)}{|\mathbf{r}'(i)|} = T_i, \frac{\mathbf{r}'(i) \times \mathbf{r}''(i)}{|\mathbf{r}'(i)|^3} = k_i \quad (*)$$

其中, $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \text{Im}(\overline{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{r}'')$, T_i, P_i 为已知二元向量, k_i 为已知实数, $i=0, 1$, 则称 $\mathbf{r}(t)$ 是一条平面 G^2 Hermite 插值曲线。 T_i, k_i 分别称为插值端点 P_i 的单位切向量和曲率, $i=0, 1$ 。

2.1 第一类曲线

设六次 PH 曲线 $\mathbf{r}(t) = \sum_{j=0}^6 P_j B_j^6(t)$, $t \in [0, 1]$, 且

$\mathbf{r}'(t) = [w_0 B_0^3(t) + w_1 B_1^3(t) + w_2 B_2^3(t) + B_3^3(t)] [u_0 B_0^1(t) + u_1 B_1^1(t)]^2$, 满足上面 G^2 Hermite 插值条件(*)。将已知的 $\mathbf{r}(0)$ 与 $\mathbf{r}(1)$ 代入式(1)得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(1) = \mathbf{r}(0) &+ \frac{1}{6} w_0 u_0^2 + \frac{1}{10} w_1 u_0^2 + \frac{1}{15} w_0 u_0 u_1 \\ &+ \frac{1}{20} w_2 u_0^2 + \frac{1}{10} w_1 u_0 u_1 + \frac{1}{60} w_0 u_1^2 + \frac{1}{10} w_2 u_0 u_1 \\ &+ \frac{1}{20} w_1 u_1^2 + \frac{1}{60} u_0^2 + \frac{1}{10} w_2 u_1^2 + \frac{1}{15} u_0 u_1 + \frac{1}{6} u_1^2 \end{aligned} \quad (3)$$

记 $|\mathbf{r}'(0)| = w_0 \lambda^2, |\mathbf{r}'(1)| = \mu^2$, 则:

$$u_0 = \pm \lambda \sqrt{T_0} \quad (4)$$

$$u_1 = \pm \mu \sqrt{T_1} \quad (5)$$

将向量进行复形式表示, 记:

$$T_0 = T_{0,x} + iT_{0,y}, T_1 = T_{1,x} + iT_{1,y}$$

$$\sqrt{T_0} = S_{0,x} + iS_{0,y}, \sqrt{T_1} = S_{1,x} + iS_{1,y}, \text{ 则:}$$

$$k_0 = \frac{\pm 2\mu(S_{0,x}^3 S_{1,y} - S_{0,x}^2 S_{0,y} S_{1,x} + S_{0,x} S_{0,y}^2 S_{1,y} - S_{0,y}^3 S_{1,x})}{\pm w_0 \lambda^3} \quad (6)$$

$$k_1 = \frac{\pm 2\lambda(S_{1,x}^2 S_{1,y} S_{0,x} + S_{1,y}^3 S_{0,x} - S_{1,x}^3 S_{0,y} - S_{1,y}^2 S_{1,x} S_{0,y})}{\pm \mu^3} \quad (7)$$

若给定式(*)和 w_0 , 将式(6)、(7)联立, 可以求得 λ, μ 值。将其代入式(4)、(5)求出 u_0, u_1 , 再由式(3), 分离实部和虚部, 解关于 w_1, w_2 的二元一次方程组, 从而最终求得六次 PH 曲线及其控制顶点。

虽然式(4)、(5)的符号选择有 4 种组合情况, 但是式(6)、(7)所得表达结果唯一, 其求解出

来的是两组互为相反数的 (λ, μ) ，分别代回式(3)，得到的两组 w_1, w_2 相同，因此求得第一种六次PH曲线只有一条。

设 $\xi_i, (i=1, 2, 3)$ 为实多项式 $w(t)$ 的3个代数根，则 $w_0 = \frac{\xi_1 \xi_2 \xi_3}{(\xi_1 - 1)(\xi_2 - 1)(\xi_3 - 1)}$ 。 $w_0 > 0$ 说明 $(0, 1)$ 区间存在两个奇异点或者不存在奇异点，而 $w_0 < 0$ 说明 $(0, 1)$ 区间存在1个或3个奇异点^[20]。因此，自由参数 w_0 可以体现出六次PH曲线奇异点情况。

例1. 取与文献[10]相同的插值条件： $P_0 = -5, P_6 = 6, T_0 = 0.5154 + 0.8575i, T_1 = 0.4472 - 0.8944i, k_0 = -0.11, k_1 = -0.14$ 。

令 $w_0 = 1$ ，代入上述分析过程，得到关于 w_1, w_2 的方程组：

$$\begin{cases} 6 = -0.6118612241 + 2.481131852w_1 + 2.392518559w_2 \\ 0 = 0.105743186 + 0.6377018065w_1 - 0.6004716617w_2 \end{cases}$$

进而可计算得到满足 G^2 Hermite插值条件(*)的六次PH曲线为如图1(a)所示：

$$\begin{aligned} r(t) = & -5 + 7.7204t + 1.8391t^6 - 2.1118t^5 - 3.8137t^4 \\ & - 1.7252t^3 + 9.0912t^2 + i(12.8673t - 0.2595t^6 \\ & + 4.0880t^5 - 2.4774t^4 - 5.2999t^3 - 8.9184t^2) \end{aligned}$$

其控制顶点为：

$$\begin{aligned} P_1(-3.7133, 2.1445), P_2(-1.8205, 3.6945) \\ P_3(0.59216, 4.3850), P_4(3.1841, 3.7857) \\ P_5(5.0087, 1.9827) \end{aligned}$$

令 $w_0 = 0.5$ ，关于 w_1, w_2 的方程组为：

$$\begin{cases} 6 = -0.467296704 + 3.648513226w_1 + 3.352986618w_2 \\ 0 = -0.388395998 + 1.379984141w_1 - 0.409372307w_2 \end{cases}$$

计算可得满足 G^2 Hermite插值条件(*)的六次PH曲线，如图1(b)所示：

$$\begin{aligned} r(t) = & -5 + 6.4920t + 4.1195t^6 - 8.6709t^5 - 1.6387t^4 \\ & + 4.3776t^3 + 6.3205t^2 + i(10.8200t - 1.8713t^6 \\ & + 13.5096t^5 - 20.3984t^4 - 4.4262t^3 - 6.4861t^2) \end{aligned}$$

其控制顶点为：

$$\begin{aligned} P_1(-3.9180, 1.8033), P_2(-2.4146, 3.1743) \\ P_3(-0.2710, 4.3341), P_4(2.6225, 4.1443) \\ P_5(4.8211, 2.3578) \end{aligned}$$

令 $w_0 = 0.1$ ，关于 w_1, w_2 的方程组为：

$$\begin{cases} 6 = 1.501401090 + 9.334506207w_1 + 7.692635382w_2 \\ 0 = -1.274844644 + 6.006616320w_1 + 1.330978548w_2 \end{cases}$$

计算可得满足 G^2 Hermite插值条件(*)的六次PH曲线，如图1(c)所示：

$$\begin{aligned} r(t) = & -5 + 4.3415t + 0.6096t^6 - 6.8583t^5 - 0.8789t^4 \\ & + 12.8131t^3 + 0.9730t^2 + i(7.2358t - 0.9437t^6 \\ & + 13.6091t^5 - 37.0603t^4 + 23.1491t^3 - 5.9901t^2) \end{aligned}$$

其控制顶点为：

$$\begin{aligned} P_1(-4.2764, 1.2060), P_2(-3.4880, 2.0126) \\ P_3(-1.9940, 3.5773), P_4(0.7875, 4.5870) \\ P_5(4.2371, 3.5258) \end{aligned}$$

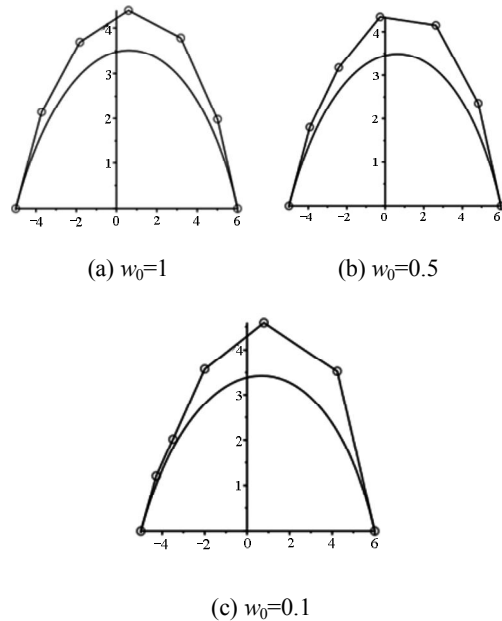


图1 第一类六次PH曲线 w_0 取不同值时的图像

对于以上3种不同 w_0 的取值情况，采用如下选取标准对曲线度量^[2]：

弧长： $S = \int ds = \int_0^1 \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$ (8)

能量积分： $E = \int k^2 ds = \int_0^1 k^2 |r'(t)| dt$ (9)

绝对旋转数： $R_{abs} = \frac{1}{2\pi} \int |k| ds = \frac{1}{2\pi} \int k^2 |r'(t)| dt$ (10)

其中， k 为曲率。

以上3类积分，采用 10^5 为细分单位求其数值解。并对以下选取标准的求解施以相同方法。

从表1可知， $w_0=0.5$ 时其弧长小于 $w_0=1$ 且大于 $w_0=0.1$ ，但其能量积分、绝对旋转数都是三者中最小的。

表1 第一类六次PH曲线 w_0 取不同值时的选取标准

曲线	弧长 S	能量积分 E	绝对旋转数 R_{abs}
$w_0=1$	13.702 9	0.000 794 5	0.005 306
$w_0=0.5$	13.679 7	0.000 491 7	0.002 813
$w_0=0.1$	13.611 0	0.000 548 3	0.003 128

2.2 第二类曲线

六次 PH 曲线 $r(t) = \sum_{j=0}^6 P_j B_j^6(t), t \in [0, 1]$, 且 $r'(t) = w(t)Q^2(t) = [w_0 B_0^1(t) + B_1^1(t)][u_0 B_0^2(t) + u_1 B_1^2(t) + u_2 B_2^2(t)]^2$ 满足 G^2 Hermite 插值条件(*). 将 $r(0), r(1)$ 代入式(2) 得到:

$$r(1) = r(0) + \frac{1}{6}w_0 u_0^2 + \frac{2}{15}w_0 u_0 u_1 + \frac{1}{30}u_0^2 + \frac{1}{30}w_0 u_0 u_2 + \frac{1}{15}w_0 u_1^2 + \frac{1}{15}u_0 u_1 + \frac{1}{15}w_0 u_1 u_2 + \frac{1}{30}u_0 u_2 + \frac{1}{15}u_1^2 + \frac{1}{30}w_0 u_2^2 + \frac{2}{15}u_1 u_2 + \frac{1}{6}u_2^2 \quad (11)$$

记 $|r'(0)| = w_0 \lambda^2, |r'(1)| = \mu^2$, 则:

$$u_0 = \pm \lambda \sqrt{T_0} \quad (12)$$

$$u_2 = \pm \mu \sqrt{T_1} \quad (13)$$

$T_0, T_1, \sqrt{T_0}, \sqrt{T_1}$ 仍按上述表示, 记:

$$u_1 = u_{1,x} + i u_{1,y} \quad (14)$$

则:

$$k_0 = \pm 4 \frac{S_{0,x}^3 u_{1,y} - S_{0,x}^2 S_{0,y} u_{1,x} + S_{0,x} S_{0,y}^2 u_{1,y} - S_{0,y}^3 u_{1,x}}{w_0 \lambda^3} \quad (15)$$

$$k_1 = \pm 4 \frac{-S_{1,x}^3 u_{1,y} + S_{1,x}^2 S_{1,y} u_{1,x} - S_{1,x} S_{1,y}^2 u_{1,y} + S_{1,y}^3 u_{1,x}}{\mu^3} \quad (16)$$

若给定式(*)和 w_0 , 将式(15)、(16)联立, 可以用 (λ, μ) 表示出 $u_{1,x}, u_{1,y}$, 再将式(12)、(13)代入式(11), 分离实部和虚部得到关于 (λ, μ) 的二元六次方程组, 将求出的 (λ, μ) 代回式(12)~(14)求得 u_0, u_1, u_2 , 进而得到原六次 PH 曲线和控制顶点。

式(12)、(13)符号有(+,+),(+,-),(-,+),(-,-) 4 种组合情况, 符号的差异会得到不同的 (λ, μ) 值。通过以下几组实例数据发现, 给定 w_0 值, 每组符号均得到 10 组互为相反数的不同 (λ, μ) 值, 且 4 组符号得到对应的 (λ, μ) 绝对值相同。类似上一种, 互为相反数的 (λ, μ) 求得的 PH 曲线也一样, 所以每种符号求得 5 条不同的曲线。而式(12)符号的改变, 会导致 μ 值符号改变, 同样式(13)符号的改变, 也决定 λ 值符号的改变, 但最终得到的控制顶点坐标和六次 PH 曲线是一致的, 说明绝对值相同的 (λ, μ) 求得的 PH 曲线也一样, 所以最终只有 5 条不同的第二种六次 PH 曲线, 如图 2~3 所示。

设 ξ 为实多项式 $w(t)$ 的代数根, 则 $w_0 = \frac{\xi}{\xi-1}$ 。

$w_0 < 0$ 说明 $(0,1)$ 区间存在一个奇异点, $w_0 > 0$ 说明 $(0,1)$ 区间不存在奇异点^[20], 因此自由参数 w_0 反映了六次 PH 曲线奇异点位置。在实际应用中, 为了避

免特定曲线段奇异点的出现, 一般选取 $w_0 > 0$ 。

例 2. 取与例 1 相同的 G^2 Hermite 插值条件。 $w_0 = 1, w_0 = 0.5, w_0 = 0.1$ 时, 相应的关于 (λ, μ) 的二元六次方程组如下, 六次 PH 曲线及其控制顶点如图 2~4 所示。

$$\left\{ \begin{aligned} 6 &= -5 + 0.006269526188\lambda^4 + 0.0001093673127\mu^6 \\ &\quad + 0.00005868129428\lambda^6 + 0.007979705386\mu^4 \\ &\quad + 0.0003337760495\mu^3\lambda^3 + 0.002805830079\mu\lambda^3 \\ &\quad + 0.004108630513\lambda\mu^3 + 0.08944000003\mu^2 \\ &\quad + 0.06661681884\lambda\mu + 0.1029000\lambda^2 \\ 0 &= -0.0001173625885\lambda^6 - 0.000306459074\mu^4 \\ &\quad - 0.000240779963\lambda^4 - 0.178880\mu^2 \\ &\quad - 0.002558406292\lambda\mu + 0.0001822788544\mu^6 \\ &\quad + 0.17150\lambda^2 + 0.006847717523\lambda\mu^3 \\ &\quad - 0.00001281860584\mu^3\lambda^3 - 0.005611660159\mu\lambda^3 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} 6 &= -5 + 0.002089842063\lambda^4 + 0.00008202548447\mu^6 \\ &\quad + 0.00001100274268\lambda^6 + 0.006649754485\mu^4 \\ &\quad + 0.002739087009\lambda\mu^3 + 0.00012516660186\mu^3\lambda^3 \\ &\quad + 0.001169095866\mu\lambda^3 + 0.08198666669\mu^2 \\ &\quad + 0.04996261413\lambda\mu + 0.0600250\lambda^2 \\ 0 &= -0.0000802599877\lambda^4 + 0.004565145016\lambda\mu^3 \\ &\quad - 0.00002200548534\lambda^6 - 0.000255382561\mu^4 \\ &\quad - 0.1639733334\mu^2 - 0.001918804719\lambda\mu \\ &\quad + 0.1000416667\lambda^2 - 0.0000048069772\mu^3\lambda^3 \\ &\quad - 0.002338191732\mu\lambda^3 + 0.0001367091408\mu^6 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} 6 &= -5 + 0.0002507810476\lambda^4 + 0.00006015202195\mu^6 \\ &\quad + 0.0000003227471185\lambda^6 + 0.005585793768\mu^4 \\ &\quad + 0.001643452206\lambda\mu^3 + 0.00001835768273\mu^3\lambda^3 \\ &\quad + 0.0001964081055\mu\lambda^3 + 0.076024\mu^2 \\ &\quad + 0.03663925036\lambda\mu + 0.02572499999\lambda^2 \\ 0 &= -0.0000096311986\lambda^4 + 0.002739087010\lambda\mu^3 \\ &\quad + 0.04287500000\lambda^2 - 0.0000007050233213\mu^3\lambda^3 \\ &\quad - 0.0003928162111\mu\lambda^3 + 0.0001002533699\mu^6 \\ &\quad - 0.152048\mu^2 - 0.0000006454942367\lambda^6 \\ &\quad - 0.000214521351\mu^4 - 0.001407123461\lambda\mu \end{aligned} \right.$$

如表 2 并结合图形, 比较以上标准可发现, 13 条六次 PH 曲线的弧长相近; 有尖点出现的曲线弧长相对较长, 能量积分和绝对旋转数偏大; 能量积分越小, 绝对旋转数也越小。综合来看, 图 2(a~c)、图 3(a~c)、图 4(a)均较好地满足了 G^2 Hermite 插值条件的 PH 曲线。

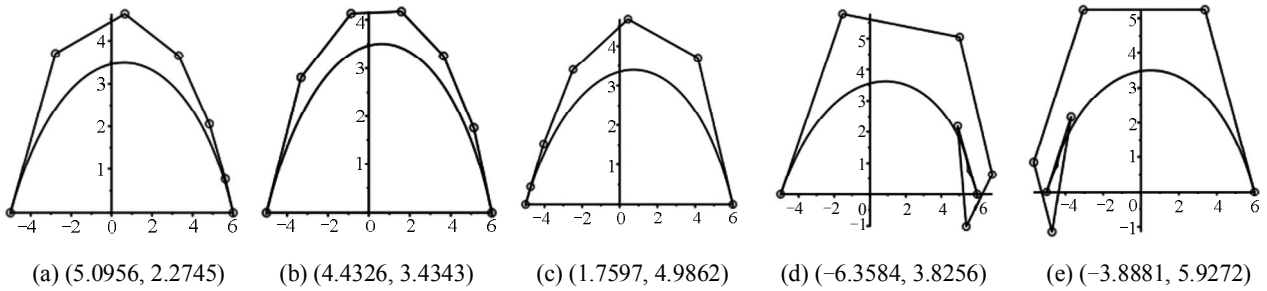


图 2 第二类六次PH曲线 $w_0=1$ 时的图像

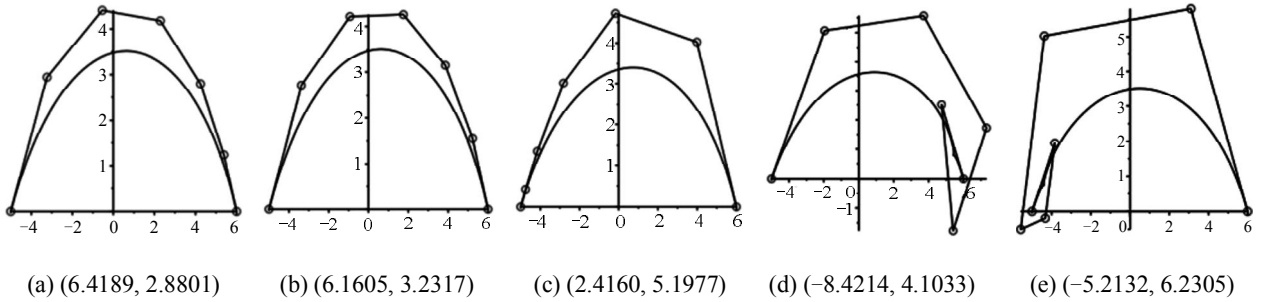


图 3 第二类六次PH曲线 $w_0=0.5$ 时的图像

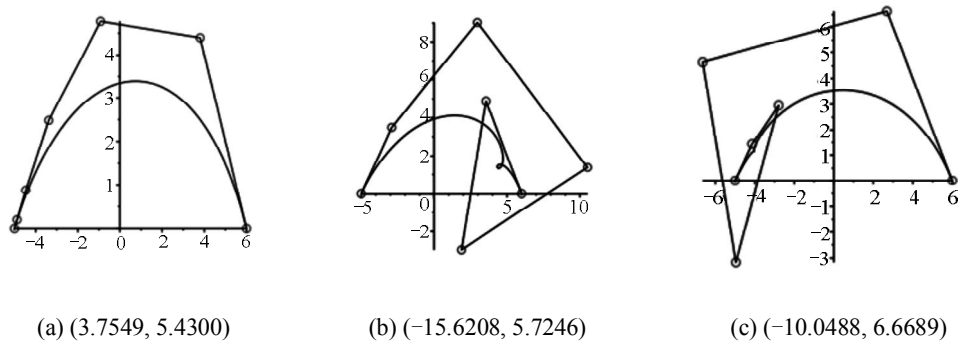


图 4 第二类六次 PH 曲线 $w_0=0.1$ 时的图像

表 2 第二类六次PH曲线 w_0 取不同值时的选取标准

w_0	(λ, μ)	弧长 S	能量积分 E	绝对旋转数 R_{abs}
$w_0=1$	图 2(a)	13.681 8	0.007 5	0.022 0
	图 2(b)	13.698 4	0.001 3	0.008 5
	图 2(c)	13.569 4	0.018 4	0.027 4
	图 2(d)	14.001 5	25 519.555 5	79.013 1
	图 2(e)	13.795 4	157 378.440 3	217.120 9
$w_0=0.5$	图 3(a)	13.701 7	0.002 6	0.012 0
	图 3(b)	13.704 8	0.001 6	0.009 1
	图 3(c)	13.573 5	0.019 3	0.031 2
	图 3(d)	14.044 9	12 394.104 4	49.396 7
	图 3(e)	14.809 6	125 025.211 1	201.244 6
$w_0=0.1$	图 4(a)	13.560 0	0.282 7	0.127 6
	图 4(b)	15.607 8	4.793 7	0.486 7
	图 4(c)	13.853 4	27 284.367 5	84.897 1

本文不研究 w_0 对曲线的决定作用, 所以针对例 1 和例 2 的 G^2 Hermite 插值条件, 只给出了 w_0 分别取 1, 0.5, 0.1 时对应的曲线和衡量标准。第一类曲线里, $w_0=0.5$ 是较好的曲线, 其弧长介于两者之间, 能量积分和绝对旋转数均最小。第二类曲线里, $w_0=1$ 和 $w_0=0.5$ 的满足条件且较好的曲线数量要多于 $w_0=0.1$, 且 $w_0=1$ 和 $w_0=0.5$ 的衡量标准相近。下面采用的是 $w_0=0.5$ 的六次 PH 曲线解决插值逼近圆弧的问题。

3 圆弧的六次 PH 曲线逼近

上面讨论了六次 PH 曲线的 G^2 Hermite 插值, 下面利用以上分析解决插值逼近特殊的 90° 和 67° 圆弧的问题。其他度数的圆弧, 可以类似得到, 也可以利用对称等变换或样条等知识解决更一般的圆弧插值逼近问题。这里 $w_0=0.5$ 。

3.1 90° 圆弧的六次 PH 曲线逼近

采用六次 PH 曲线逼近 $x^2+(y-1)^2=1$ 的四分之

一段圆弧, 其满足的 G^2 Hermite 插值条件复表示为:

$$P_0 = 0, P_6 = 1 + i, T_0 = 1, T_1 = i, k_0 = k_1 = 1 \quad (**)$$

通过计算, 对于第一类六次 PH 曲线, 其逼近曲线如图 5(a)所示的虚线(下同), 相应的弧长、能量积分、绝对旋转数的数值解见表 3, 弧长误差为 0.000 424 5。对于第二类六次 PH 曲线, 有 5 组 (λ, μ) 值, 对应 5 条插值曲线如图 5 所示。通过表 3 和图 5 看出, 图 5(a)和(d)是满足 G^2 Hermite 插值条件最好的两条六次 PH 曲线, 其表达式分别为:

$$\begin{aligned} r_1(t) = & 1.1892t + 0.0727t^6 + 0.3147t^5 - 0.9833t^4 \\ & - 0.0787t^3 + 0.4855t^2 + i(0.1851t^6 - 0.6982t^5 \\ & + 0.2299t^4 + 0.5760t^3 + 0.7071t^2) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} r_2(t) = & 1.4436t + 0.1862t^2 + 0.0878t^5 - 0.0840t^4 \\ & - 0.6276t^3 + 0.0061t^6 + i(1.0420t^2 + 0.0112t^5 \\ & + 0.2616t^3 + 0.0078t^6 - 0.3226t^4) \end{aligned} \quad (18)$$

弧长误差分别为 0.000 424 5 和 0.000 082 68。

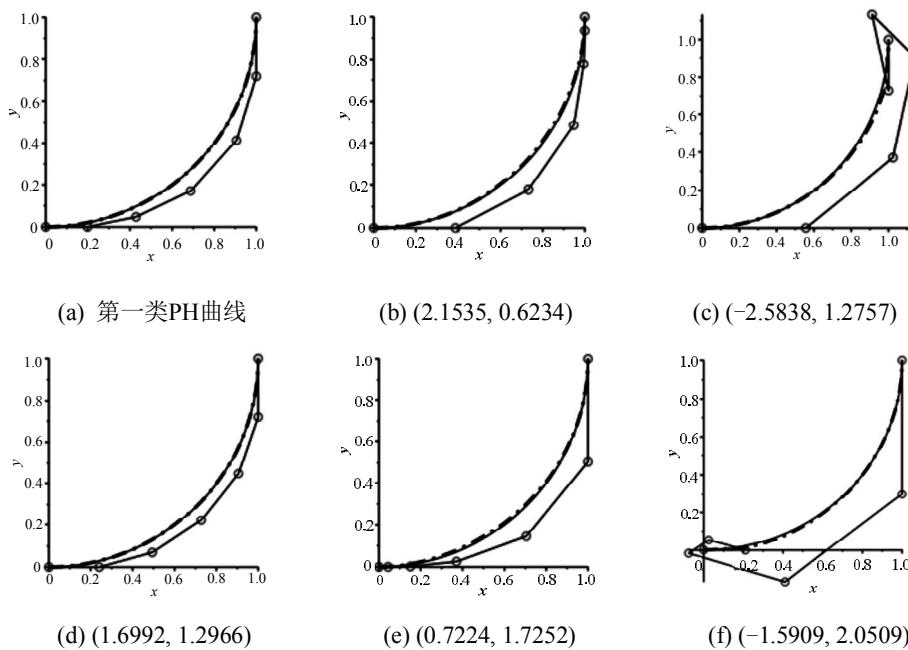


图 5 90° 圆弧的 G^2 六次 PH 插值曲线

表 3 90° 圆弧的 G^2 六次 PH 曲线选取标准

分类	(λ, μ)	弧长 S	弧长误差	能量积分 E	绝对旋转数 R_{abs}
第一类	图 5(a)	1.571 220 864	0.000 424 5	0.274 9	0.498 5
	图 5(b)	1.566 403 611	0.004 393	1.600 5	1.102 7
	图 5(c)	1.579 907 987	0.009 112	4.2640×10^8	37 011.359 9
第二类	图 5(d)	1.570 879 011	0.000 082 68	0.620 5	0.618 7
	图 5(e)	1.565 248 725	0.005 548	79.292 2	5.540 6
	图 5(f)	1.578 500 802	0.007 704	1.1496×10^8	1 377.599 0

为了检验六次 PH 曲线 G^2 Hermite 插值逼近圆弧的效果, 将其与圆弧的五次 PH 曲线 G^2 Hermite 插值逼近和圆弧的六次 PH 曲线 C^1 Hermite 插值逼近进行对比。

(1) 90° 圆弧的五次 PH 曲线 G^2 Hermite 插值逼近。依据文献[10]的方法, 在 G^2 Hermite 插值条件(**)下, 得到满足条件的五次 PH 曲线本质上(将曲

线及其控制顶点关于直线 $y=-x+1$ 对称的两条曲线算作一条)有 3 条, 如图 6 所示。选取标准见表 4, 其中弧长误差最小的是 0.000 114, 对应的是五次 PH 曲线 G^2 Hermite 插值逼近效果最好的曲线如图 6(c)所示, 但是和图 5(d)的六次 PH 曲线比较见表 3, 曲线式(18)的插值逼近效果更好。

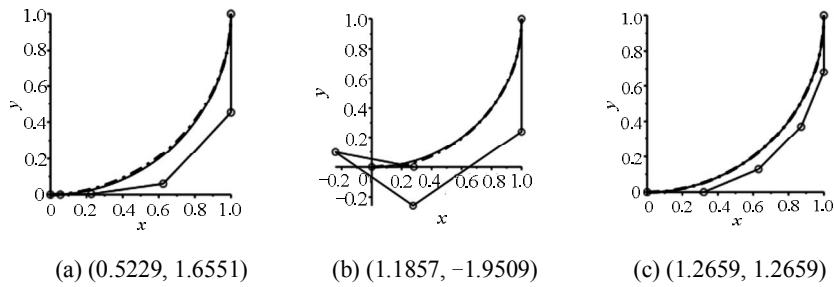


图 6 90° 圆弧的 G^2 五次PH插值曲线

表 4 90° 圆弧的 G^2 五次PH插值曲线选取标准

(λ, μ)	弧长 S	弧长误差	能量积分 E	绝对旋转数 R_{abs}
图 6(a)	1.564 975 321	0.005 821	82.031 1	5.088 0
图 6(b)	1.577 630 468	0.006 834	1.4738×10^8	1 567.382 5
图 6(c)	1.570 682 256	0.000 114	0.721 7	0.673 2

(2) 90° 圆弧的六次 PH 曲线 C^1 Hermite 插值逼近。依据文献[20]中的讨论, 取 $w_0=0.5$, 若进行六次 PH 曲线 C^1 Hermite 插值逼近圆弧, 需要构造 C^1 Hermite 插值条件:

$$P_0, P_1, P_5, P_6 \quad (***)$$

为了和圆弧的六次 PH 曲线 G^2 Hermite 插值逼近进行比较, 式(***)应分别选取第一类曲线式(17)的 4 个控制顶点 $P_0=0, P_1=0.1982, P_5=1+0.7198i, P_6=1+i$ 和第二类曲线式(18)的 4 个控制顶点 $P_0=0, P_1=0.2406, P_5=1+0.7198i,$

$$P_6=1+i。$$

第一类得到圆弧的 C^1 插值逼近六次 PH 曲线(如图 7(a)所示)的选取标准见表 5 与表 3 中第一类的相同, 说明该六次 PH 曲线与曲线(17)的插值逼近效果相同。第二类关于 u_1 的一元二次复方程有 2 组解: $u_1=1.3840+0.6133i, u_1=-5.1777-2.1413i$, 则求得圆弧的 C^1 插值逼近六次 PH 曲线有两条, 见图 7(b)、(c)。显然图 7(b)是较好的圆弧插值逼近曲线, 且相应的选取标准(见表 5)与曲线式(18)几乎相同, 说明二者是插值逼近效果非常相近的曲线。

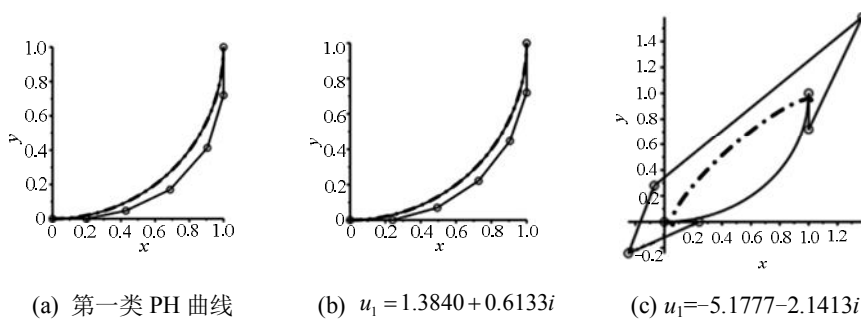


图 7 90° 圆弧的 C^1 六次PH插值曲线

表 5 90° 圆弧的 C^1 六次PH插值曲线选取标准

分类	弧长 S	弧长误差	能量积分 E	绝对旋转数 R_{abs}
第一类	1.571 220 865	0.000 424 50	0.274 9	0.498 5
第二类	1.570 879 011	0.000 082 68	0.391 7	0.618 7

以上结果分析, 关于 90° 圆弧的 Hermite 插值逼近曲线, 五次 G^2 Hermite 插值 PH 曲线的最好逼近效果, 不如六次 G^2 Hermite 插值 PH 曲线的最好逼近效果。而 2 条六次 G^2 Hermite 插值 PH 曲线(17)、(18)的逼近效果与最好的 2 条六次 C^1 Hermite 插值 PH 曲线的逼近效果几乎相同。

3.2 67° 圆弧的六次 PH 曲线逼近

采用六次 PH 曲线逼近 $x^2+y^2=1$ 的 67° 圆弧, 其满足的 G^2 Hermite 插值条件复表示为:

$$P_0 = 1, P_6 = \cos 67^\circ + i \sin 67^\circ, T_0 = i$$

$$T_1 = -\sin 67^\circ + i \cos 67^\circ, k_0 = k_1 = 1 \quad (***)$$

从得到的六次 PH 曲线(如图 8 所示)和选取标准(见表 6)可知, 图 8(a)、(c)是近似效果最好的 2 条曲线, 弧长误差分别为 0.000 005 073 和 0.000 060 83。类似上述 90° 圆弧的分析, 可以做这 2 条曲线确定的 C^1 Hermite 插值条件下的六次 PH 逼近曲线和式 (***) 条件下的五次 PH 逼近曲线, 见图 9 与表 7、图 10 与表 8。

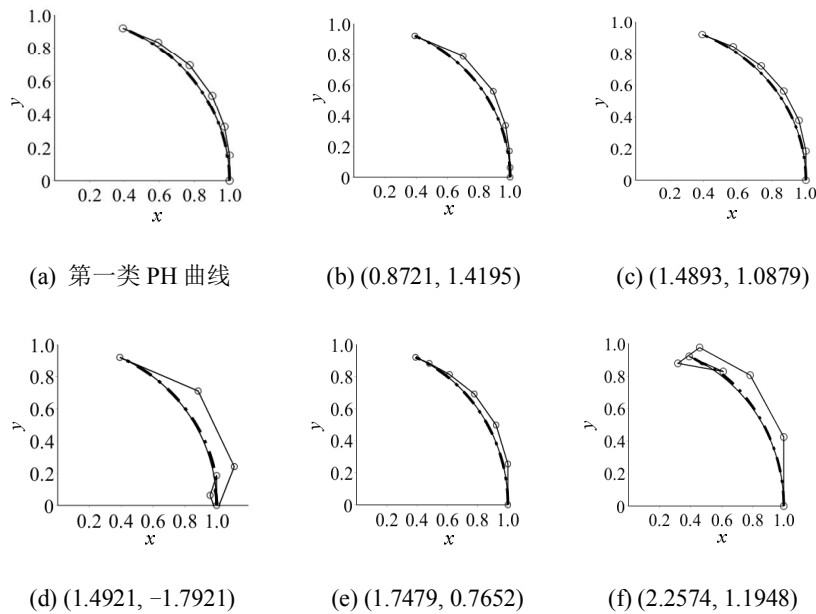


图 8 67° 圆弧的 G^2 六次 PH 插值曲线

表 6 67° 圆弧的 G^2 六次 PH 插值曲线选取标准

分类	(λ, μ)	弧长 S	弧长误差	能量积分 E	绝对旋转数 R_{abs}
第一类	图 8(a)	1.169 365 526	0.000 005 073	0.365 7	0.471 0
	图 8(b)	1.168 607 494	0.000 763 1	1.201 2	1.101 1
	图 8(c)	1.169 431 430	0.000 060 83	0.270 3	0.317 4
第二类	图 8(d)	1.176 820 216	0.007 456 0	1.0878×10^9	77 653.916 7
	图 8(e)	1.169 000 772	0.000 369 8	4.048 06	1.041 2
	图 8(f)	1.177 442 251	0.008 072	1.9062×10^9	21 632.002 5

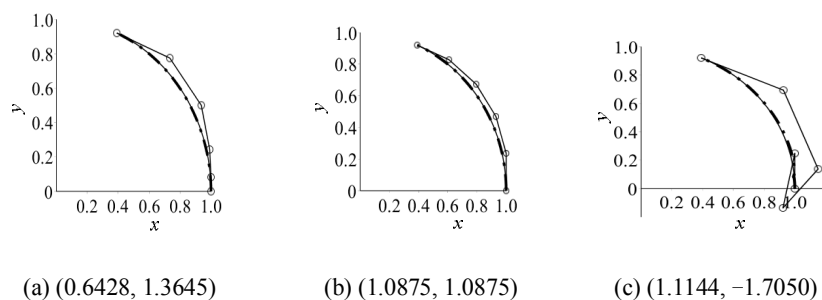
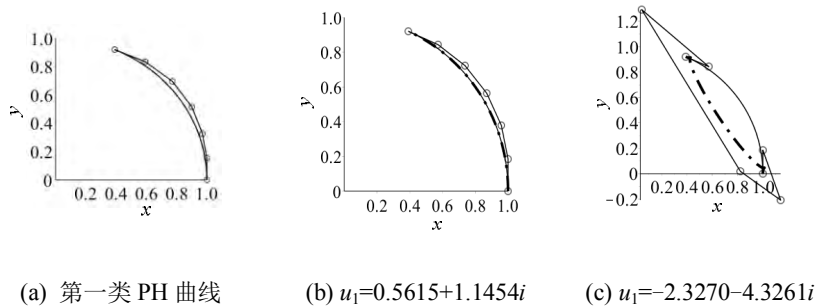


图 9 67° 圆弧的 G^2 五次 PH 插值曲线

表7 67°圆弧的 G^2 五次PH插值曲线选取标准

曲线	弧长 S	弧长误差	能量积分 E	绝对旋转数 R_{abs}
图9(a)	1.168 565 827	0.000 804 8	1.042 7	0.991 9
图9(b)	1.169 366 144	0.000 004 455	0.237 6	0.299 8
图9(c)	1.176 447 366	0.007 077	1.3212×10^9	82 697.997 5

(a) 第一类 PH 曲线 (b) $u_1=0.5615+1.1454i$ (c) $u_1=-2.3270-4.3261i$ 图10 67°圆弧的 C^1 六次PH插值曲线表8 67°圆弧的 C^1 六次PH插值曲线选取标准

分类	弧长 S	弧长误差	能量积分 E	绝对旋转数 R_{abs}
第一类	1.169 365 526	0.000 005 073	0.365 7	0.471 0
第二类	1.169 431 431	0.000 060 830	0.235 7	0.317 5

从以上图形和表格数据发现, 67°圆弧的逼近曲线里, 最好的2条六次 G^2 Hermite插值PH曲线的逼近效果与六次 C^1 Hermite插值PH曲线的逼近效果几乎相同; 但和90°圆弧的逼近效果略有不同的是, 最好的 G^2 五次PH曲线和 G^2 六次PH曲线的弧长误差有相同的数量级 10^{-6} , 且前者的逼近效果略好于后者。

4 结论

本文对六次PH曲线的 G^2 Hermite插值进行了研究, 对其依据次数关系分成两类, 通过自由参数的确定, 分别讨论了两类曲线在 G^2 Hermite插值条件下的曲线求解。对比曲线弧长、能量积分、绝对旋转数, 选取了较好的插值曲线。其中自由参数恰恰是六次PH速端曲线 $\mathbf{r}'(t) = w(t)\mathbf{Q}^2(t)$ 中 $w(t)$ 的一个系数 w_0 , 其可以由 $\mathbf{r}(t)$ 的奇异点表示, 因此控制了 w_0 , 便确定了六次PH曲线上奇异点的位置, 从而简化了非正则的六次PH曲线的研究。对于第一类曲线, 奇异点在曲线中的位置不易控制, 但是第二类的更易控制, 且表达结果更加丰富。依

据以上分析, 本文利用六次PH曲线在 G^2 Hermite插值条件下, 分别对90°和67°两种圆弧进行了逼近。对于每种圆弧逼近问题, 取定一个自由参数, 两类六次PH曲线都达到了很好的逼近效果, 对比图像、弧长、弧长误差、能量积分、绝对旋转数, 找到逼近效果最好的曲线。同时对五次PH曲线 G^2 和六次PH曲线 C^1 插值逼近这两种圆弧的研究发现, 90°圆弧的逼近曲线里, 式(18)的逼近效果最好, 弧长误差为0.000 082 68。在式(17)、(18)确定的 C^1 Hermite插值条件下, 得到的逼近效果最好的两条 C^1 六次PH曲线与式(17)、(18)近乎相同, 说明 C^1 六次PH曲线插值逼近90°圆弧的问题可以通过 G^2 Hermite六次PH曲线求解, 这个结论也体现在插值逼近67°圆弧上。在67°圆弧的逼近曲线里, 最好的五次和六次 G^2 Hermite插值PH曲线逼近效果相近, 弧长误差都达到 10^{-6} 数量级。对圆弧的六次PH曲线逼近的研究突破了以往都是对奇次PH曲线插值逼近圆弧的传统, 在CAD和工业设计上, 若提供了插值端点、切向量和曲率数据, 可以利用六次PH曲线进行插值逼近, 同时自由参数增加了构造的灵活性。

参 考 文 献

- [1] Farouki R T, Sakkalis T. Pythagorean hodographs [J]. IBM Journal of Research and Development, 1990, 34(5): 736-752.
- [2] Farouki R T. Pythagorean-hodographs curves: algebra and geometry inseparable [M]. Berlin: Springer Press, 2008: 369-377, 546-566.
- [3] Meek D S, Walton D J. Geometric Hermite interpolation with Tschirnhausen cubics [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1997, 81: 299-309.
- [4] Farouki R T, Neff C A. Hermite interpolation by Pythagorean hodograph quintics [J]. Mathematics of Computation, 1995, 64(212): 1589-1609.
- [5] Kong J H, Jeong S P, Lee S, et al. C^1 Hermite interpolation with simple planar PH curves by speed reparametrization [J]. Computer Aided Geometric Design, 2008, 25(4): 214-229.
- [6] Farouki R T, Manjunathaiah J, Jee S. Design of rational cam profiles with Pythagorean-hodograph curves [J]. Mechanism and Machine Theory, 1998, 33(6): 669-682.
- [7] Sir Z, Jüttler B. Constructing acceleration continuous tool paths using Pythagorean hodograph curves [J]. Mechanism and Machine Theory, 2005, 40(11): 1258-1272.
- [8] Jüttler B. Hermite interpolation by Pythagorean hodograph curves of degree seven [J]. Mathematics of Computation, 2001, 70(235): 1089-1111.
- [9] Walton D J, Meek D S. Planar G^2 transition with a fair Pythagorean hodograph quintic curve [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2002, 138(1): 109-126.
- [10] 陈国栋, 王国瑾. 五次 PH 曲线的 Hermite 插值[J]. 软件学报, 2001, 12(10): 1569-1572.
- [11] 杨 平, 汪国昭. C^3 连续的 7 次 PH 样条曲线插值[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2014, 26(5): 731-738.
- [12] 杨 平, 汪国昭. C^3 连续的七次 PH 样条闭曲线插值[J]. 浙江大学学报: 工学版, 2014, 48(5): 934-941.
- [13] 寿华好, 江 瑜, 缪永伟. 基于三次 PH 曲线误差可控代数曲线等距线逼近算法[J]. 图学学报, 2012, 33(2): 30-33.
- [14] Farouki R T. The conformal map $z \rightarrow z^2$ of the hodograph plane [J]. Computer Aided Geometric Design, 1994, 11(4): 363-390.
- [15] 杨 平, 汪国昭. 7 次 PH 曲线的控制多边形的几何性质[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2014, 26(3): 378-384.
- [16] Wang G Z, Fang L C. On control polygons of quartic Pythagorean-hodograph curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 2009, 26(9): 1006-1015.
- [17] Li Z, Ait-Haddou R, Biard L. Pythagorean hodograph spline spirals that match G^3 Hermite data from circles [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015, 278: 162-180.
- [18] Farouki R T, Giannelli C, Sestini A. Identification and “reverse engineering” of Pythagorean-hodograph curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 2015, 34: 21-36.
- [19] 张伟红, 蔡亦青, 冯玉瑜. 圆弧的五次 PH 曲线等弧长逼近[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2010, 22(7): 1082-1086.
- [20] Farouki R T. Construction of G^2 rounded corners with Pythagorean-hodograph curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 2014, 31(2): 127-139.
- [21] 方林聪, 汪国昭. 六次 PH 曲线 C^1 Hermite 插值[J]. 中国科学数学, 2014, 44(7): 799-804.