

## 插值有理 Bézier 渐近四边形的有理 Bézier 曲面

王 慧<sup>1)</sup>, 朱春钢<sup>1)\*</sup>, 李彩云<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(大连理工大学数学科学学院 大连 116024)

<sup>2)</sup>(大连理工大学基础教学部 盘锦 124221)

(cgzhu@dlut.edu.cn)

**摘 要:** 为构造封闭的曲线为有理 Bézier 曲面的边界渐近线, 给出封闭四边曲线为渐近四边形的条件, 并提出插值该四边形的曲面构造方法. 首先在给定角点数据的前提下构造优化的  $n$  次有理 Bézier 渐近四边形; 然后利用该四边形和曲面在四边形上的切矢确定曲面沿边界的两排控制顶点和权; 最后极小化曲面薄板能量函数确定剩余自由的控制顶点, 进而构造出光滑的双  $5n-7$  次有理 Bézier 插值曲面. 实例展示边界曲线为有理 3, 4, 5 次时曲面的构造结果, 以及边界曲线含有直线或者拐点的情况, 表明该方法是可行的.

**关键词:** 渐近线; 有理 Bézier 曲线; 曲面构造; 插值  
**中图法分类号:** TP391.41

## Construction of Rational Bézier Surface Interpolating Asymptotic Quadrilateral

Wang Hui<sup>1)</sup>, Zhu Chungang<sup>1)\*</sup>, and Li Caiyun<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024)

<sup>2)</sup>(School of Mathematics and Physics Science, Dalian University of Technology, Panjin 124221)

**Abstract:** Conditions for construction of rational Bézier surface interpolating a closed quadrilateral as its asymptotic boundary are presented. Firstly, from the given corner data, an optimized rational Bézier asymptotic quadrilateral of degree  $n$  is constructed. Secondly, two arrays of control points and weights along the boundary curves are obtained from the quadrilateral and the tangent vectors of the surface. Finally, minimizing the plate spline energy determines the other free control points and then a smooth rational Bézier surface of bi- $(5n-7)$  degree is constructed. Some representative examples show the construction of surfaces interpolating the cubic, quartic or quintic rational Bézier asymptotic quadrilaterals and verify the effectiveness of the method.

**Key words:** asymptotic curve; rational Bézier curve; surface construction; interpolation

插值给定曲线为其边界线的曲面构造一直是 CAGD&CAD 研究的内容之一. 插值测地线或曲率线这样特殊曲线的曲面构造被广泛研究. 例如, Wang 等<sup>[1]</sup>和 Li 等<sup>[2]</sup>分别构造了过给定测地线和曲率线的参数曲面; Kasap 等<sup>[3]</sup>和 Li 等<sup>[4]</sup>又分别把这

种参数曲面拓展到插值测地线和曲率线的一般曲面族构造, 以及过给定测地线或曲率线的可展曲面构造<sup>[4-7]</sup>、近似极小直纹曲面构造<sup>[8]</sup>、B 样条曲面设计<sup>[9]</sup>等研究中. 值得注意的是, 以上研究得到的曲面都插值非封闭的曲线. Farouki 等<sup>[10-13]</sup>对于封闭

收稿日期: 2016-07-22; 修回日期: 2016-11-14. 基金项目: 国家自然科学基金(11671068, 11271060, 11401077); 民用飞机专项项目(MJ-F-2012-04); 辽宁省高等学校优秀人才支持计划(LJQ2014010); 中央高校基本科研业务费专项基金(DUT16LK38, DUT16LK39); 中国博士后科学基金资助项目(2015M58132). 王 慧(1990—), 女, 博士研究生, 主要研究方向为计算几何; 朱春钢(1977—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 会员, 论文通讯作者, 主要研究方向为计算几何; 李彩云(1984—), 女, 博士, 副教授, 硕士生导师, 主要研究方向为计算几何.

曲线进行了广泛研究, 构造了一系列以测地线<sup>[10-12]</sup>和曲率线<sup>[13]</sup>为边界曲线的 Coons 曲面. 其中, 文献[10]给出了 4 条封闭测地线是 Coons 曲面片边界线的充要条件, 文献[11-12]实现了插值测地边界线的三角 Coons 曲面和四边 Bézier 曲面. 为了弥补文献[12]中生成的曲面次数过高的缺陷, Yang 等<sup>[14-15]</sup>构造了过 Bézier 和 B 样条测地四边形的低次张量积 Bézier 曲面和 B 样条曲面. Yang 还得到了插值有理 Bézier 测地四边形<sup>[16]</sup>的有理 Bézier 曲面的构造方法<sup>[17]</sup>, 其中曲面次数最低是双 8 次的.

除上述测地线和曲率线外, 渐近线也是微分几何中曲面上的一类重要曲线, 并被广泛应用在很多领域, 如天文<sup>[18]</sup>、机械<sup>[19]</sup>、建筑<sup>[20]</sup>等. 目前, 对于渐近线的研究主要集中在如何计算或获得曲面上的渐近线<sup>[21]</sup>. 理论上, 如何构造曲面使其插值给定的曲线为其渐近线也是一项比较有意义的工作. 基于文献[1]的结果, Bayram 等<sup>[22]</sup>构造了插值渐近线的参数曲面. 刘羽等<sup>[23]</sup>推广了文献[5-6]的工作, 设计一类过给定渐近线的可展曲面. Atalay 等<sup>[24]</sup>利用 Cartan 标架给出一种判定过渐近线的曲面族的方法. 上述研究中的渐近线都不是封闭的, 因此有必要构造插值封闭渐近线为边界曲线的曲面. 本文给出封闭四边曲线为渐近四边形的条件, 并构造双  $5n-7$  次有理 Bézier 曲面插值  $n$  次有理 Bézier 渐近四边形.

### 1 渐近四边形

#### 1.1 渐近线的基本知识

定义 1<sup>[25]</sup>. 在曲面  $S$  上一点, 其法曲率为零的切方向称为曲面  $S$  在该点的渐近方向. 如果曲面  $S$  上一条曲线在每一点的切方向都是曲面在该点的渐近方向, 则称该曲线是曲面  $S$  上的渐近曲线.

引理 1<sup>[26]</sup>. 曲面上的一条曲线是其渐近曲线, 当且仅当它是一条直线, 或者它的密切平面恰好是曲面的切平面.

显然, 每条渐近曲线的法曲率  $k_n = 0$ . 根据曲面上曲线的曲率  $k$ 、测地曲率  $k_g$  和法曲率  $k_n$  之间的关系式  $k^2 = k_g^2 + k_n^2$ , 若该曲线为渐近线, 则有  $k = \sigma k_g$  ( $\sigma = \pm 1$ ). 从而对于曲线的 Frenet 标架  $(e(s), n(s), b(s))$  和曲线在曲面上的 Darboux 标架  $(e(s), h(s), N(s))$ , 易推导出  $h = \sigma n, N = \sigma b$ . 因此, 曲面上曲线的 Frenet 标架和 Darboux 标架满足模符

号关系. 由以上分析, 可以得到如下引理.

引理 2. 曲面  $R(u, v)$  上一条正则曲线  $r(t)$  是渐近线, 当且仅当它满足如下条件:

- 1) 曲线  $r(t)$  的法曲率恒等于零;
- 2) 曲线  $r(t)$  的每个非拐点上的副法向量垂直于曲面在点  $R(u(t), v(t)) = r(t)$  处的切平面;
- 3) 曲线  $r(t)$  的每个非拐点上的丛切面垂直于曲面在点  $R(u(t), v(t)) = r(t)$  处的切平面.

引理 3. 对曲面  $R(u, v)$  上的正则曲线  $r(t)$ , 若  $N(t) = \sigma b(t)$  ( $\sigma = \pm 1$ ), 则  $h(t) = \sigma n(t), k_n(t) = 0, k(t) = \sigma k_g(t), \tau_g(t) = -\tau(t)$ .

证明. 对于弧长参数  $s$ , 由  $N(s) = \sigma b(s)$ , 有  $h(s) = \sigma n(s)$ . 利用 Frenet 公式, 可以推得方程

$$\begin{pmatrix} \dot{e}(s) \\ \dot{h}(s) \\ \dot{N}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{e}(s) \\ \sigma \dot{n}(s) \\ \sigma \dot{b}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -\sigma k(s) & 0 & \sigma \tau(s) \\ 0 & -\sigma \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma k(s) & 0 \\ -\sigma k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e(s) \\ h(s) \\ N(s) \end{pmatrix}.$$

对比 Darboux 公式, 可得  $k_n(s) = 0, k(s) = \sigma k_g(s), \tau_g(s) = -\tau(s)$ . 对于一般参数  $t$  有相同的结果, 即引理得证. 证毕.

命题 1. 若曲面  $R(u, v)$  上 2 条正则曲线  $r_1(t)$  和  $r_2(t)$  相交于非拐点  $P = r_1(t) = r_2(t)$ , 且满足  $N_P = \sigma_1 b_1(t_1) = \sigma_2 b_2(t_2)$  ( $\sigma_1, \sigma_2 = \pm 1$ ), 则  $\tau_1(t_1) = -\tau_2(t_2)$ . 其中,  $N_P$  是曲面法向量,  $b_1(t_1), \tau_1(t_1)$  和  $b_2(t_2), \tau_2(t_2)$  分别是曲线  $r_1(t_1)$  和  $r_2(t_2)$  在点  $P$  处的副法向量和挠率.

证明. 对于 2 条不同的以弧长为参数的渐近线  $r_1(s)$  和  $r_2(s)$ , 其法曲率  $k_{n1}(s) = 0, k_{n2}(s) = 0$ , 则有  $N_1(s) = \sigma_1 b_1(s), N_2(s) = \sigma_2 b_2(s)$ . 根据引理 3,  $r_1(s)$  和  $r_2(s)$  的测地挠率  $\tau_{g1}(s)$  和  $\tau_{g2}(s)$  分别满足  $\tau_{g1}(s) = -\tau_1(s), \tau_{g2}(s) = -\tau_2(s)$ . 设曲线  $r_1(s), r_2(s)$  和曲面在相交点处的切平面夹角分别为  $\alpha_1, \alpha_2$ , 由法曲率  $K_{n1}, K_{n2}$  和测地挠率  $\tau_{g1}, \tau_{g2}$ , 满足

$$\begin{aligned} & \sin(\alpha_2 - \alpha_1)[\tau_{g1}(\alpha_1) + \tau_{g2}(\alpha_2)] = \\ & \cos(\alpha_2 - \alpha_1)[K_{n1}(\alpha_1) - K_{n2}(\alpha_2)], \end{aligned}$$

有  $\sin(\alpha_2 - \alpha_1)[\tau_{g1}(\alpha_1) + \tau_{g2}(\alpha_2)] = 0$ . 又因  $\sin(\alpha_2 -$

$\alpha_1 \neq 0$ , 故  $\tau_1(s_1) = -\tau_2(s_2)$ . 对于一般参数  $t$  有相同的结论. 证毕.

推广上述 2 条相交渐近线的结论到 4 条封闭曲线, 可得如下命题.

**命题 2.** 若 4 条没有拐点的正则曲线  $r_i(t) (i = 1, \dots, 4)$  (如图 1 所示) 是曲面  $R(u, v)$  的渐近边界曲线, 当且仅当它们满足如下限制条件:

- 1) 边界法矢限制. 边界法矢  $N_i(t)$  连续且满足  $N_i(t) = \pm b_i(t) (i = 1, \dots, 4)$ .
- 2) 丛切限制. 在 4 个角点处, 4 条曲线的副法向量满足符号关系

$$\begin{cases} N_{12} = \sigma_1(0)b_1(0) = \sigma_2(0)b_2(0) \\ N_{14} = \sigma_1(1)b_1(1) = \sigma_4(0)b_4(0) \\ N_{23} = \sigma_2(1)b_2(1) = \sigma_3(0)b_3(0) \\ N_{34} = \sigma_3(1)b_3(1) = \sigma_4(1)b_4(1) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\sigma_i(j) = \pm 1 (i = 1, \dots, 4; j = 0, 1)$ , 且  $N_{12}, N_{14}, N_{23}$  和  $N_{34}$  是曲面在 4 个角点处的单位法向量.

- 3) 角点渐近相交限制.

$$\begin{cases} \tau_1(0) = -\tau_2(0) \\ \tau_1(1) = -\tau_4(0) \\ \tau_2(1) = -\tau_3(0) \\ \tau_3(1) = -\tau_4(1) \end{cases} \quad (2)$$

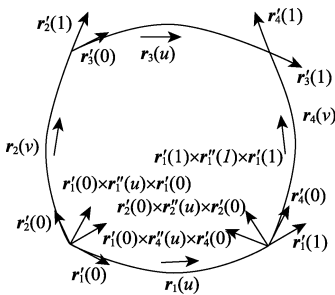


图 1 渐近四边形

### 1.2 $n$ 次有理 Bézier 渐近四边形

对于没有拐点的 4 条  $n$  次有理 Bézier 曲线(其中  $B_j^n(u), B_j^n(v)$  为  $n$  次 Bernstein 基函数)

$$r_i(u) = \frac{\sum_{j=0}^n \omega_j P_{ij} B_j^n(u)}{\sum_{j=0}^n \omega_j B_j^n(u)}, u \in [0, 1], i = 1, 3;$$

$$r_i(v) = \frac{\sum_{j=0}^n \omega_j P_{ij} B_j^n(v)}{\sum_{j=0}^n \omega_j B_j^n(v)}, v \in [0, 1], i = 2, 4.$$

给定其角点曲率  $k_i(j) (j = 0, 1)$ 、权因子  $\omega_j (j = 0, n; i = 1, \dots, 4)$  与控制顶点

$$\begin{aligned} r_1(0) &= P_{10} = P_{20} = r_2(0), \\ r_1(1) &= P_{1n} = P_{40} = r_4(0), \\ r_2(1) &= P_{2n} = P_{30} = r_3(0), \\ r_3(1) &= P_{3n} = P_{4n} = r_4(1); \end{aligned}$$

$P_{11}, P_{1(n-1)}, P_{21}, P_{2(n-1)}, P_{31}, P_{3(n-1)}, P_{41}, P_{4(n-1)}$ . 剩余控制顶点  $P_{i2}, \dots, P_{i(n-2)}$  和权因子  $\omega_{i1}, \dots, \omega_{i(n-1)} (i = 1, \dots, 4)$  是待定的. 在命题 2 条件约束下找到这些未知量满足的关系, 最后通过极小化限制能量函数求解出待定量, 得到优化的渐近四边曲线.

注. 以上给定数据情况下, 4 次是构造有理 Bézier 渐近四边形的最低次数要求, 故下面主要针对这种情况进行求解. 对于更高次数的情况, 方法类似. 当边界线为有理 3 次时, 需要减少给定数据, 但是较少的信息会使得约束条件下方程求解变得复杂, 甚至无解. 第 2.3 节实例中给出了边界线是有理 3, 4, 5 次时的构造结果.

- 1) 边界法矢限制

沿正则边界曲线  $r_i$ , 如果曲面的单位法向量  $N_i$  和副法向量  $b_i$  共线且连续, 则 4 个角点处的转换数是偶数, 即

$$\prod_{i,j} \sigma_i(j) = 1, i = 1, \dots, 4; j = 0, 1 \quad (3)$$

未知参数要满足此兼容条件.

- 2) 丛切限制

考虑式(1), 以角点  $P_{10}$  为例. 因为曲面的单位法向量  $N_{12} = \frac{r_1'(0) \times r_2'(0)}{\|r_1'(0) \times r_2'(0)\|}$  平行于单位副法向量

$$b_1(0) = \frac{r_1'(0) \times r_1''(0)}{\|r_1'(0) \times r_1''(0)\|}, b_2(0) = \frac{r_2'(0) \times r_2''(0)}{\|r_2'(0) \times r_2''(0)\|},$$

所以  $r_1''(0)$  和  $r_2''(0)$  位于曲面在点  $P_{10}$  处的切平面上, 即  $P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}$  共面. 因此  $P_{22}$  可以被表示为  $P_{22} = P_{20} + \lambda_{22}(\Delta P_{10}) + \mu_{22}(\Delta P_{20}), P_{12}$  被表示为

$$P_{12} = P_{10} + \lambda_{12}(\Delta P_{10}) + \mu_{12}(\Delta P_{20}) \quad (4)$$

在  $P_{14}$  处同理,  $P_{42} = P_{40} + \lambda_{42}(\Delta P_{40}) + \mu_{42}(\Delta P_{13})$ , 且

$$P_{12} = P_{14} + \lambda_{13}(\Delta P_{40}) + \mu_{13}(\Delta P_{13}) \quad (5)$$

对于其他角点, 也有类似的表示形式

$$\begin{aligned} P_{32} &= P_{30} + \lambda_{32}(\Delta P_{23}) + \mu_{32}(\Delta P_{30}), \\ P_{22} &= P_{24} + \lambda_{23}(\Delta P_{23}) + \mu_{23}(\Delta P_{30}), \\ P_{32} &= P_{34} + \lambda_{33}(\Delta P_{33}) + \mu_{33}(\Delta P_{43}), \end{aligned}$$

$$P_{42} = P_{44} + \lambda_{43}(\Delta P_{33}) + \mu_{43}(\Delta P_{43}).$$

其中,  $\Delta P_{ij} = P_{i(j+1)} - P_{ij}$ ,  $\Delta^k P_{ij} = \Delta^{k-1} P_{i(j+1)} - \Delta^{k-1} P_{ij}$ ;  
参数  $\lambda_{ik}, \mu_{ik}$  是实数,  $k = 2, 3, i = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 3$ .

由曲线的曲率表达式

$$k_1(0) = \frac{3\omega_{10}\omega_{12} \|(\Delta P_{10}) \times (\Delta^2 P_{10})\|}{4\omega_{11}^2 \| \Delta P_{10} \|^3},$$

可以用  $\omega_{12}$  和  $\mu_{12}$  表示  $\omega_{11}$ . 同样, 可从其他角点处的曲率得到  $\omega_{21}, \omega_{31}, \omega_{41}, \omega_{13}, \omega_{23}, \omega_{33}$  和  $\omega_{43}$  的表达式.

由式(4)(5),  $P_{12}$  满足的 2 个方程可以推出  $\lambda_{12}, \mu_{13}$  的具体数值及  $\lambda_{13}$  和  $\mu_{12}$  之间的关系. 对于其他点  $P_{i2}(i = 2, \dots, 4)$  有类似的结论, 即得到  $\lambda_{23}, \mu_{22}, \lambda_{33}, \mu_{32}, \lambda_{42}, \mu_{43}$  的具体数值, 以及  $\lambda_{22}$  和  $\mu_{23}, \lambda_{32}$  和  $\mu_{33}, \lambda_{43}$  和  $\mu_{42}$  之间的关系.

### 3) 角点渐近相交限制

由式(2), 有

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_{10}\omega_{13}}{\omega_{11}\omega_{12}} \cdot \frac{\det(\Delta P_{10}, \Delta^2 P_{10}, \Delta^3 P_{10})}{\|(\Delta P_{10}) \times (\Delta^2 P_{10})\|^2} = \\ & \frac{-\omega_{20}\omega_{23}}{\omega_{21}\omega_{22}} \cdot \frac{\det(\Delta P_{20}, \Delta^2 P_{20}, \Delta^3 P_{20})}{\|(\Delta P_{20}) \times (\Delta^2 P_{20})\|^2}, \\ & \frac{\omega_{11}\omega_{14}}{\omega_{12}\omega_{13}} \cdot \frac{\det(\Delta P_{13}, \Delta^2 P_{12}, \Delta^3 P_{11})}{\|(\Delta P_{13}) \times (\Delta^2 P_{12})\|^2} = \\ & \frac{-\omega_{40}\omega_{43}}{\omega_{41}\omega_{42}} \cdot \frac{\det(\Delta P_{40}, \Delta^2 P_{40}, \Delta^3 P_{40})}{\|(\Delta P_{40}) \times (\Delta^2 P_{40})\|^2}, \\ & \frac{\omega_{21}\omega_{24}}{\omega_{22}\omega_{23}} \cdot \frac{\det(\Delta P_{23}, \Delta^2 P_{22}, \Delta^3 P_{21})}{\|(\Delta P_{23}) \times (\Delta^2 P_{22})\|^2} = \\ & \frac{-\omega_{30}\omega_{33}}{\omega_{31}\omega_{32}} \cdot \frac{\det(\Delta P_{30}, \Delta^2 P_{30}, \Delta^3 P_{30})}{\|(\Delta P_{30}) \times (\Delta^2 P_{30})\|^2}, \\ & \frac{\omega_{31}\omega_{34}}{\omega_{32}\omega_{33}} \cdot \frac{\det(\Delta P_{33}, \Delta^2 P_{32}, \Delta^3 P_{31})}{\|(\Delta P_{33}) \times (\Delta^2 P_{32})\|^2} = \\ & \frac{-\omega_{41}\omega_{44}}{\omega_{42}\omega_{43}} \cdot \frac{\det(\Delta P_{43}, \Delta^2 P_{42}, \Delta^3 P_{41})}{\|(\Delta P_{43}) \times (\Delta^2 P_{42})\|^2}. \end{aligned}$$

可以推得  $\omega_{12}\mu_{12}, \omega_{22}\lambda_{22}, \omega_{32}\lambda_{32}$  和  $\omega_{42}\mu_{42}$  之间的 3 个关系式. 若表示出  $\mu_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{32}$ , 则由极小化限制能量函数

$$A_1 = \int_0^1 (\|r_1''(u)\|^2 + \|r_3''(u)\|^2) du + \int_0^1 (\|r_2''(v)\|^2 + \|r_4''(v)\|^2) dv \quad (6)$$

可以得到剩余参数  $\mu_{42}, \omega_{12}, \omega_{22}, \omega_{32}$  和  $\omega_{42}$  的值. 从而确定权  $\omega_{i2}$  和未知控制顶点  $P_{i2}(i = 1, \dots, 4)$ , 进而得到了优化的渐近四边形. 图 2 所示为 2 个优化的 4 次有理 Bézier 渐近四边形及控制顶点.

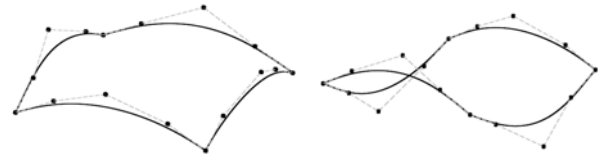


图 2 4 次有理 Bézier 渐近四边形及控制顶点

## 2 构造插值渐近四边形的有理 Bézier 曲面

第 1 节确定了有理 Bézier 渐近四边形, 为了构造插值该四边形的有理 Bézier 曲面, 需要确定曲面在边界曲线处的切矢  $T_i(i = 1, \dots, 4)$ . 它们满足

$$\begin{aligned} T_1(u) &= R_u(u, 0), T_3(u) = R_v(u, 1), \\ T_2(v) &= R_u(0, v), T_4(v) = R_u(1, v). \end{aligned}$$

因为  $T_i$  与  $r_i'(t)$  和  $[r_i'(t) \times r_i''(t)] \times r_i'(t)$  共面, 因此可以表示为

$$T_i(t) = x_i(t)r_i'(t) + y_i(t)[r_i'(t) \times r_i''(t)] \times r_i'(t), t \in [0, 1] \quad (7)$$

其中,  $x_i(t)$  和  $y_i(t)$  为标量函数. 为了方便后面讨论, 可以定义为

$$\begin{aligned} x_i(t) &= W_i(t) \sum_{j=0}^{3n-5} \alpha_{ij} B_j^{3n-5}(t), \\ y_i(t) &= (W_i(t))^4 \sum_{j=0}^1 \beta_{ij} B_j^1(t). \end{aligned}$$

其中,  $W_i(t) = \sum_{j=0}^n \omega_{ij} B_j^n(t)$ ;  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}(i = 1, \dots, 4)$  是实数.

### 2.1 插值相容性条件

以  $P_{10}$  为例,  $\alpha_{ij}, \beta_{ij}(i = 1, \dots, 4)$  可通过如下限制条件确定.

#### 1) 切矢相容性

$$\begin{aligned} T_1(0) &= r_2'(0), T_1(1) = r_4'(0), \\ T_2(0) &= r_1'(0), T_2(1) = r_3'(0), \\ T_3(0) &= r_2'(1), T_3(1) = r_4'(1), \\ T_4(0) &= r_1'(1), T_4(1) = r_3'(1). \end{aligned}$$

由有理 Bézier 函数的端点插值性,  $T_1(0) = r_2'(0)$  等价于  $\alpha_{10}r_1'(0) + \beta_{10}[r_1'(0) \times r_1''(0)] \times r_1'(0) = \alpha_{20}r_2'(0)$ . 则  $\alpha_{10}, \beta_{10}$  可以被表示为

$$\begin{aligned} \alpha_{10} &= \frac{r_1'(0) \cdot r_2'(0)}{\|r_1'(0)\|^2}, \\ \beta_{10} &= \frac{\det(r_1'(0) \times r_1''(0), r_1'(0), r_2'(0))}{\|r_1'(0) \times r_1''(0) \times r_1'(0)\|^2}. \end{aligned}$$

同理可得  $\alpha_{17}, \beta_{11}$  及  $\alpha_{i0}, \alpha_{i7}, \beta_{i0}, \beta_{i1}(i = 2, \dots, 4)$ .

#### 2) 扭矢相容性

$$\begin{aligned} R_{u,v}(0,0) &:= T_1'(0) = T_2'(0), \\ R_{u,v}(0,1) &:= T_2'(1) = T_3'(0), \\ R_{u,v}(1,0) &:= T_1'(1) = T_4'(0), \\ R_{u,v}(1,1) &:= T_3'(1) = T_4'(1). \end{aligned}$$

每个等式坐标对应相等, 可以得到含有 2 个方程的方程组, 进而可以得到  $\alpha_{i1}, \alpha_{i6} (i=1, \dots, 4)$ .

实际上, 令  $A_{12}$  是  $r_1'(0)$  和  $r_2'(0)$  在点  $P_{10}$  处的夹角, 将  $T_1'(0)$  和  $T_2'(0)$  投影到向量  $N_{12}$  上可以得到

$$\begin{aligned} T_1'(0) \cdot N_{12} &= \tau_1(0) \|r_1'(0)\| \|r_2'(0)\| \sin A_{12}, \\ T_2'(0) \cdot N_{12} &= -\tau_2(0) \|r_1'(0)\| \|r_2'(0)\| \sin A_{12}; \end{aligned}$$

即得  $\tau_1(0) = -\tau_2(0)$ , 这也验证了式(2). 其他角点处类似.

不失一般性, 令剩余参数  $\alpha_{ij} = 0 (i=1, \dots, 4; j=2, \dots, 5)$ , 则可以得到  $T_i(t) (i=1, \dots, 4)$ . 为构造插值有理 Bézier 曲线的有理 Bézier 曲面, 有必要把  $T_i'(t)$  表示成有理 Bézier 曲线形式.

记曲线  $r_i(t) = \frac{P_i(t)}{W_i(t)}$ , 则

$$r_i'(t) = \frac{P_i'(t)W_i(t) - P_i(t)W_i'(t)}{(W_i(t))^2} =: \frac{\hat{P}_i(t)}{(W_i(t))^2},$$

其中,  $\hat{P}_i(t)$  的次数为  $2n-2$ . 又因为

$$\begin{aligned} r_i'(t) \times r_i''(t) &= \frac{\hat{P}_i(t) \times \hat{P}_i'(t)}{(W_i(t))^4} = \\ &= \frac{\{P_i'(t) \times P_i''(t)W_i(t) + P_i(t) \times P_i'(t)W_i'(t) - \\ &P_i(t) \times P_i''(t)W_i'(t)\}}{(W_i(t))^3}, \end{aligned}$$

若记  $r_i'(t) \times r_i''(t) = \frac{Q_i(t)}{(W_i(t))^3}$ , 因为  $\hat{P}_i(t) \times \hat{P}_i'(t)$  的实际次数是  $4n-6$ , 则  $Q_i(t)$  的次数是  $3n-6$ . 进而有

$$r_i'(t) \times r_i''(t) \times r_i'(t) = \frac{Q_i(t) \times \hat{P}_i(t)}{(W_i(t))^5} =: \frac{\hat{Q}_i(t)}{(W_i(t))^5};$$

其中,  $\hat{Q}_i(t)$  的次数为  $5n-8$ .

利用 Bézier 乘积公式<sup>[27]</sup>, 可以将  $\hat{P}_i(t), \hat{Q}_i(t)$  表示成 Bézier 曲线形式

$$\hat{P}_i(t) = \sum_{j=0}^{2n-2} C_j^i B_j^{2n-2}(t), \hat{Q}_i(t) = \sum_{j=0}^{5n-8} D_j^i B_j^{5n-8}(t).$$

则  $T_i(t)$  可以表示为

$$\begin{aligned} T_i(t) &= \left\{ \sum_{j=0}^{3n-5} \alpha_{ij} B_j^{3n-5}(t) \sum_{j=0}^{2n-2} C_j^i B_j^{2n-2}(t) + \right. \\ &\left. \sum_{j=0}^1 \beta_{ij} B_j^1(t) \sum_{j=0}^{5n-8} D_j^i B_j^{5n-8}(t) \right\} / W_i(t) = \\ &\left\{ \sum_{j=0}^{5n-7} (E_j^i + F_j^i) B_j^{5n-7}(t) \right\} / W_i(t) \end{aligned} \quad (8)$$

其中,

$$E_j^i = \sum_{k=\max(0, j-2n+2)}^{\min(3n-5, j)} \frac{\binom{3n-5}{k} \binom{2n-2}{j-k}}{\binom{5n-7}{j}} \alpha_{ik} \cdot C_{j-k}^i,$$

$$\begin{aligned} F_j^i &= \frac{j\beta_{i1}}{5n-7} D_{j-1}^i + \left(1 - \frac{j}{5n-7}\right) \beta_{i0} D_j^i, \\ &i=1, \dots, 4, j=0, \dots, 5n-7. \end{aligned}$$

### 2.2 构造有理 Bézier 曲面

由于边界切矢  $T_i(t)$  的分子是  $5n-7$  次的, 因此定义双  $5n-7$  次的张量积有理 Bézier 曲面

$$R(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{5n-7} \sum_{j=0}^{5n-7} W_{ij} S_{ij} B_i^{5n-7}(u) B_j^{5n-7}(v)}{\sum_{i=0}^{5n-7} \sum_{j=0}^{5n-7} W_{ij} B_i^{5n-7}(u) B_j^{5n-7}(v)} =: \frac{S(u, v)}{W(u, v)} \quad (9)$$

由 Bézier 曲线升阶公式<sup>[28]</sup>, 边界有理 Bézier 曲线

$$r_i(t) \text{ 升阶到 } 5n-7 \text{ 次为 } r_i(t) = \frac{\sum_{j=0}^{5n-7} \delta_j^i M_j^i B_j^{5n-7}(t)}{\sum_{j=0}^{5n-7} \delta_j^i B_j^{5n-7}(t)}. \text{ 曲}$$

线  $r_i(t)$  作为曲线  $R(u, v)$  的边界曲线, 需要满足

$$\begin{cases} S_{0j} = M_j^1, \\ S_{j0} = M_j^2, \\ S_{(5n-7)j} = M_j^3, \\ S_{j(5n-7)} = M_j^4, \\ W_{0j} = \delta_j^1, \\ W_{j0} = \delta_j^2, \\ W_{(5n-7)j} = \delta_j^3, \\ W_{j(5n-7)} = \delta_j^4, \\ j=0, \dots, 5n-7 \end{cases} \quad (10)$$

考虑曲面在  $r_1(t)$  上的边界切矢

$$\begin{aligned} R_v(u, 0) &= \left\{ (5n-7) \sum_{i=0}^{5n-7} \Delta W_{i0} S_{i0} B_i^{5n-7}(u) W(u, 0) - \right. \\ &\left. (5n-7) S(u, 0) \sum_{i=0}^{5n-7} \Delta W_{i0} B_i^{5n-7}(u) \right\} / (W(u, 0))^2, \end{aligned}$$

其中,  $\Delta W_{i0} S_{i0} = W_{i1} S_{i1} - W_{i0} S_{i0}, \Delta W_{i0} = W_{i1} - W_{i0}$ . 令

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{5n-7} \Delta W_{i0} B_i^{5n-7}(u) &= \sum_{i=0}^{4n-7} H_i B_i^{4n-7}(u) \cdot W(u, 0) = \\ &= \sum_{i=0}^{4n-7} H_i B_i^{4n-7}(u) \cdot \sum_{i=0}^n \omega_{i0} B_i^n(u), \end{aligned}$$

可求得  $H_0 = \Delta W_{00}, H_{4n-7} = \Delta W_{(5n-7)0}$ . 选取  $H_i =$

$0(i=1, \dots, 4n-8)$ , 求得曲面权因子

$$W_{i1} = W_{i0} + \sum_{j=\max(0, i-n)}^{\min(4n-7, i)} \frac{\binom{4n-7}{j} \binom{n}{i-j}}{\binom{5n-7}{i}} H_j \cdot \omega_{(i-j)0},$$

$$i = 1, \dots, 5n-8 \quad (11)$$

则

$$\mathbf{R}_v(u, 0) = \left\{ (5n-7) \sum_{i=0}^{5n-7} \Delta W_{i0} S_{i0} B_i^{5n-7}(u) - (5n-7) S(u, 0) \sum_{i=0}^{4n-7} H_i B_i^{4n-7}(u) \right\} / W(u, 0) =$$

$$\left\{ (5n-7) \sum_{i=0}^{5n-7} (\Delta W_{i0} S_{i0} - \mathbf{L}_i^1) B_i^{5n-7}(u) \right\} / W(u, 0) =$$

$$\left\{ \sum_{i=0}^{5n-7} (\mathbf{E}_i^1 + \mathbf{F}_i^1) B_i^{5n-7}(t) \right\} / W_1(t),$$

其中,

$$\mathbf{L}_i^1 = \sum_{j=\max(0, i-n)}^{\min(4n-7, i)} \frac{\binom{4n-7}{j} \binom{n}{i-j}}{\binom{5n-7}{i}} H_j \cdot \omega_{(i-j)0} \mathbf{P}_{(i-j)0}.$$

从而控制顶点

$$S_{i1} = \frac{\mathbf{E}_i^1 + \mathbf{F}_i^1 + (5n-7)\mathbf{L}_i^1}{(5n-7)W_{i1}} + \frac{W_{i0} S_{i0}}{W_{i1}},$$

$$i = 1, \dots, 5n-8 \quad (12)$$

类似式(11)(12)的获得方法, 可以确定其他 3 边邻近边界的一排控制顶点及其权因子. 这样, 曲面  $\mathbf{R}(u, v)$  的边界 2 排权因子和控制顶点已经确定. 自由选取曲面的内部权因子  $W_{ij}$  和控制顶点  $S_{ij}(i, j = 2, \dots, 5n-9)$ , 可以得到满足插值边界曲线的一族曲面片, 且这些曲面均以这个边界四边形为公共渐近线. 为简化计算, 取  $W_{ij} = 1(i, j = 2, \dots, 5n-9)$ . 再由极小化薄板能量函数

$$A_2 = \int_0^1 \int_0^1 (\|\mathbf{R}_{uu}(u, v)\|^2 + 2\|\mathbf{R}_{uv}(u, v)\|^2 + \|\mathbf{R}_{vv}(u, v)\|^2) dudv \quad (13)$$

确定剩余的控制顶点, 由此便构造出优化的插值有理 Bézier 渐近四边形的有理 Bézier 曲面.

**算法 1.** 构造 4 次有理 Bézier 渐近四边形

输入. 给定角点曲率、权因子、控制顶点.

输出. 优化的 4 次有理 Bézier 渐近四边形.

Step1. 待定  $\omega_{ij}, \mathbf{P}_{i2}(i=1, \dots, 4; j=1, 2, 3)$ .

Step2. 指定边界法矢  $N_i(t)$ , 式(3)使曲面定向.

Step3. 丛切限制和角点渐近相交限制可以简化待定参数.

Step4. 根据式(6)确定剩余参数  $\mu_{42}, \omega_{12}, \omega_{22}, \omega_{32}, \omega_{42}$ , 得到优化的有理 Bézier 渐近四边形.

**算法 2.** 构造插值渐近四边形的优化有理 Bézier 曲面

输入.  $n$  次有理 Bézier 渐近四边形.

输出. 优化的  $5n-7$  次有理 Bézier 曲面.

Step1. 根据式(7)定义曲面在边界处切矢  $T_i(t)$ .

Step2. 插值相容性条件确定  $x_i(t)$  和  $y_i(t)$  系数, 从而确定  $T_i(t)$ , 并将其表示成有理 Bézier 形式式(8).

Step3. 根据式(9)定义双  $5n-7$  次有理 Bézier 曲面.

Step4. 升阶  $n$  次有理 Bézier 曲线至  $5n-7$  次, 得到式(10).

Step5. 利用插值曲面在边界处的切矢表示, 确定式(11)(12).

Step6. 取定  $W_{ij} = 1(i, j = 2, \dots, 5n-9)$ , 根据式(13)确定其余控制顶点, 得到优化的有理 Bézier 曲面.

### 2.3 实例

**例 1.** 为构造 4 次有理 Bézier 渐近四边形, 给定曲率  $k_i(j)=1(j=0,1)$ , 权因子  $\omega_{ij}=1(j=0,4; i=1, \dots, 4)$ . 控制顶点  $\mathbf{P}_{10} = \mathbf{P}_{20} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{P}_{14} = \mathbf{P}_{40} = (1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{P}_{24} = \mathbf{P}_{30} = (0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{P}_{34} = \mathbf{P}_{44} = (0, 1, 0)$ ;  $\Delta \mathbf{P}_{10} = \Delta \mathbf{P}_{30} = (0, 0.2, 0.1)$ ,  $\Delta \mathbf{P}_{13} = \Delta \mathbf{P}_{33} = (0, 0.2, -0.1)$ ,  $\Delta \mathbf{P}_{20} = \Delta \mathbf{P}_{40} = (-0.2, 0, 0.1)$ ,  $\Delta \mathbf{P}_{23} = \Delta \mathbf{P}_{43} = (-0.2, 0, -0.1)$ . 按照算法 1, 算法 2, 得到渐近四边形(如图 2a 所示)、边界 2 排控制顶点和双 13 次有理 Bézier 插值曲面(如图 3 所示).

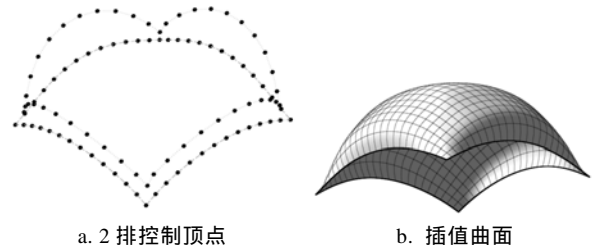


图 3 有理 Bézier 曲面

**例 2.** 该例中, 角点曲率、权因子、控制顶点的条件同例 1. 定义  $\Delta \mathbf{P}_{10} = \Delta \mathbf{P}_{30} = (0, 0.2, 0.1)$ ,  $\Delta \mathbf{P}_{13} = \Delta \mathbf{P}_{33} = (0, 0.2, -0.1)$ ,  $\Delta \mathbf{P}_{20} = \Delta \mathbf{P}_{40} = (-0.2, 0, -0.1)$ ,  $\Delta \mathbf{P}_{23} = \Delta \mathbf{P}_{43} = (-0.2, 0, 0.1)$ . 利用算法 1, 算法 2, 得到渐近四边形(如图 2b 所示)、边界 2 排控制顶点和双 13 次有理 Bézier 曲面(如图 4 所示).

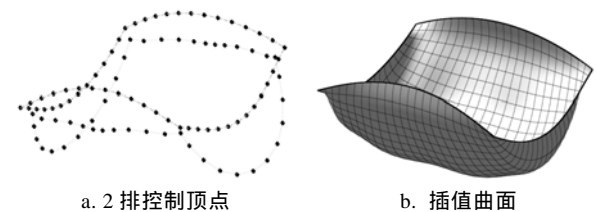


图 4 有理 Bézier 曲面

例 3. 若要构造插值 3 次有理 Bézier 渐近四边形的曲面, 需要减少给定的数据. 例如, 不给定角点曲率, 给定权因子  $\omega_{i_0} = \omega_{i_3} = 1, \omega_{i_1} = \omega_{i_2} = 2(i = 1, \dots, 4)$ , 控制顶点  $P_{10} = P_{20} = (1, 0, 0), P_{13} = P_{40} = (1, 1, 1), P_{23} = P_{30} = (0, 0, 1), P_{33} = P_{43} = (0, 1, 2); \Delta P_{10} = (0.2, 0.3, 0), \Delta P_{20} = (-0.3, -0.2, 0), \Delta P_{40} = (-0.3, 0.2, 0), \Delta P_{30} = (-0.2, 0.3, 0)$ . 类似算法 1 求解待定控制顶点  $P_{i_2} (i = 1, \dots, 4)$ , 得到渐近四边形如图 5a 所示. 用算法 2 构造双 8 次有理 Bézier 插值曲面如图 5b 所示.

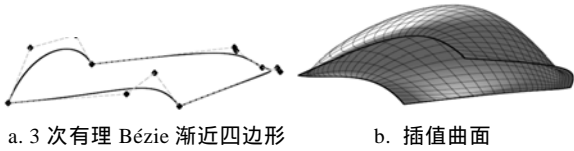


图 5 有理 Bézier 曲面

例 4. 为构造 5 次有理 Bézier 渐近四边形, 给定四边曲线角点处的数据同例 1, 待定未知控制顶点  $P_{i_2}, P_{i_3}$  及权因子  $\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \omega_{i_3}, \omega_{i_4} (i = 1, \dots, 4)$ . 渐近四边形的构造方法类似算法 1, 插值曲面的构造同算法 2. 得到的 5 次有理 Bézier 渐近四边形如图 6a 所示, 对应的双 18 次有理 Bézier 曲面如图 6b 所示.

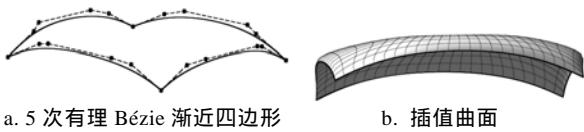


图 6 有理 Bézier 曲面

例 5. 由引理 1 知, 表面上的直线也是其渐近线. 给定角点数据:  $k_1(j) = 0(j = 0, 1), \Delta P_{10} = (0, 0.2, 0), \Delta P_{13} = (0, 0.2, 0)$  (其余数据与例 1 相同), 可构造出以图 7a 为边界渐近四边形的双 13 次有理 Bézier 曲面 (如图 7b 所示).

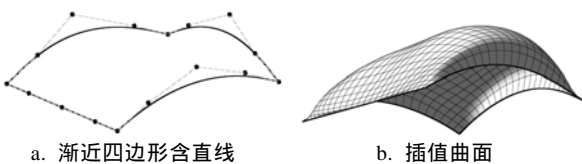


图 7 有理 Bézier 曲面

例 6. 例 1~5 都是建立在边界四边曲线不含有拐点情况. 如果曲线  $r(t)$  在点  $t_0$  是拐点, 则  $r'(t_0) \times r''(t_0) = 0$ , 且副法向量的左右极限  $b_-, b_+$  符号相反. 但当每条边界线  $r_i(t) (i = 1, \dots, 4)$  上有 1 个 (或 2 个) 拐点

时, 副法向量  $b(t)$  沿边界的旋转数仍是偶数, 这仍然满足命题 2 中 1) 的边界法矢限制条件要求. 当命题 2 中 2), 3) 的条件也满足时, 可以构造插值含有拐点的渐近四边形. 图 8a 所示为在给定角点数据: 曲率  $k_i(j) = 1(j = 0, 1)$ , 权因子  $\omega_{ij} = 1(j = 0, 4; i = 1, \dots, 4)$ , 控制顶点  $P_{10} = P_{20} = (1, 0, -0.5), P_{14} = P_{40} = (1, 1, 0), P_{24} = P_{30} = (0, 0, 0), P_{34} = P_{44} = (0, 1, -0.5); \Delta P_{10} = \Delta P_{13} = (0, 0.2, -0.5), \Delta P_{20} = \Delta P_{23} = (-0.2, 0, -0.5), \Delta P_{30} = \Delta P_{33} = (0, 0.2, 0.5), \Delta P_{40} = \Delta P_{43} = (-0.2, 0, 0.5)$  情况下, 每条边界线含有 1 个拐点时的渐近四边形. 图 8b 所示为插值图 8a 的双 13 次有理 Bézier 曲面.

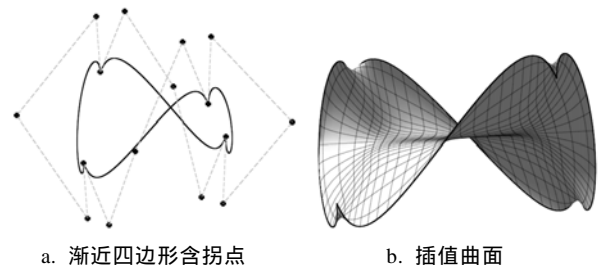


图 8 有理 Bézier 曲面

### 3 结 语

本文分析了 2 条相交曲线成为渐近线的条件, 并给出封闭曲线是渐近四边形的限制条件. 给定角点位置、切向量、曲率、权因子, 在  $n$  次有理 Bézier 四边形满足的 3 个渐近限制条件下, 可以用待定参数表示剩余未知变量; 极小化限制能量函数可以构造出优化的渐近四边形. 为方便讨论, 将所有曲线表示成有理 Bézier 形式, 曲面在边界曲线上切矢的确定限制了生成的有理 Bézier 曲面最低次数是双  $5n-7$  次的. 渐近四边形确定曲面的边界曲线的控制顶点和权因子, 而曲面在边界曲线上切矢确定曲面邻近边界曲线的一排控制顶点和权因子. 除了这 2 排数据, 曲面的内部剩余控制顶点和权都是自由选取的, 增加了满足要求的曲面构造的灵活性. 给定权因子, 通过极小化薄板样条函数可以确定剩余控制顶点, 从而得到插值有理 Bézier 渐近四边形的优化有理 Bézier 曲面. 实例中构造了双 13 次有理 Bézier 曲面插值 4 次有理 Bézier 渐近四边形, 包括边界曲线含有直线或拐点的情况; 减少给定数据可以构造双 8 次有理 Bézier 曲面插值 3 次有理 Bézier 渐近四边形. 若要根据实际需要获得更多自由度, 可以构造双 18 次有理 Bézier 曲面插值 5 次有理 Bézier 渐近四边形.

## 参考文献(References):

- [1] Wang G J, Tang K, Tai C L. Parametric representations of a surface pencil with a common spatial geodesic[J]. *Computer-Aided Design*, 2004, 36(5): 447-459
- [2] Li C Y, Wang R H, Zhu C G. Parametric representation of a surface pencil with a common line of curvature[J]. *Computer-Aided Design*, 2011, 43(9): 1110-1117
- [3] Kasap E, Akyildiz F T, Orbay K. A generalization of surface family with common spatial geodesic[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 201(1/2): 781-789
- [4] Li C Y, Wang R H, Zhu C G. A generalization of surface family with common line of curvature[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 219(17): 9500-9507
- [5] Li C Y, Wang R H, Zhu C G. Design and connection of developable surfaces through Bézier geodesics[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, 218(7): 3199-3208
- [6] Li C Y, Wang R H, Zhu C G. An approach for designing a developable surface through a given line of curvature[J]. *Computer-Aided Design*, 2013, 45(3): 621-627
- [7] Li Caiyun, Zhu Chungang, Wang Renhong. Researches on developable surface modeling by interpolating special curves[J]. *Science China: Math*, 2015, 45(9): 1441-1456(in Chinese)  
(李彩云, 朱春钢, 王仁宏. 插值特殊曲线的可展曲面造型研究进展[J]. *中国科学: 数学*, 2015, 45(9): 1441-1456)
- [8] Chen Jie, Wang Guojin. Designing approximate minimal ruled surfaces with a given geodesic[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2010, 22(10): 1750-1755(in Chinese)  
(陈杰, 王国瑾. 过测地线的近似极小直纹曲面设计[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2010, 22(10): 1750-1755)
- [9] Yang Huogen, Wang Guozhao. Optimization design of B-spline surfaces through geodesics[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2013, 25(10): 1433-1438(in Chinese)  
(杨火根, 汪国昭. 过测地线的 B 样条曲面优化设计[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2013, 25(10): 1433-1438)
- [10] Farouki R T, Szafran N, Biard L. Existence conditions for Coons patches interpolating geodesic boundary curves[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2009, 26(5): 599-614
- [11] Farouki R T, Szafran N, Biard L. Construction and smoothing of triangular Coons patches with geodesic boundary curves[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2010, 27(4): 301-312
- [12] Farouki R T, Szafran N, Biard L. Construction of Bézier surface patches with Bézier curves as geodesic boundaries[J]. *Computer-Aided Design*, 2009, 41(11): 772-781
- [13] Biard L, Farouki R T, Szafran N. Construction of rational surface patches bounded by lines of curvature[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2010, 27(5): 359-371
- [14] Yang H G, Wang G Z. Optimized design of Bézier surface through Bézier geodesic quadrilateral[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015, 273: 264-273
- [15] Yang H G, Wang G Z. Construction of B-spline surface with B-spline curves as boundary geodesic quadrilateral[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2015, 290: 104-113
- [16] Yang H G. Construction of rational quadrilateral Bézier geodesics[C] // *Proceedings of the 3rd International Conference on System Science, Engineering Design and Manufacturing Informatization*. Los Alamitos: IEEE Computer Society Press, 2012, 2: 180-183
- [17] Yang Huogen. Optimized design of surface through the geodesics[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2014(in Chinese)  
(杨火根. 过测地线的曲面优化设计[D]. 杭州: 浙江大学, 2014)
- [18] Contopoulos G. Asymptotic curve and escapes in Hamiltonian systems[J]. *Astronomy and Astrophysics*, 1990, 231(1): 41-55
- [19] Angenent S B, Velázquez J J L. Asymptotic shape of cusp singularities in curve shortening[J]. *Duke Mathematical Journal*, 1995, 77(1): 71-110
- [20] Flöry S, Pottmann H. Ruled surfaces for rationalization and design in architecture[C] // *Proceedings of the 30th Annual Conference of the Association for Computer Aided Design in Architecture*. Fargo: Association for Computer Aided Design in Architecture Press, 2010: 103-109
- [21] Wang H J, Ni Q. A new method of moving asymptotes for large-scale unconstrained optimization[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 203(1): 62-71
- [22] Bayram E, Güler F, Kasap E. Parametric representation of a surface pencil with a common asymptotic curve[J]. *Computer-Aided Design*, 2012, 44(7): 637-643
- [23] Liu Yu, Wang Guojin. Designing of developable surface pencil through given curve as its common asymptotic curve[J]. *Journal of Zhejiang University: Engineering Science*, 2013, 47(7): 1246-1252(in Chinese)  
(刘羽, 王国瑾. 以已知曲线为渐近线的可展曲面束的设计[J]. *浙江大学学报: 工学版*, 2013, 47(7): 1246-1252)
- [24] Atalay G S, Kasap E. Surfaces family with common null asymptotic[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 260: 135-139
- [25] do Carmo M P. *Differential geometry of curve and surface*[M]. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1976
- [26] Chen Weihuan. *Differential geometry*[M]. Beijing: Peking University Press, 2011(in Chinese)  
(陈维桓. *微分几何*[M]. 北京: 北京大学出版社, 2011)
- [27] Farin G. *Curves and surfaces for CAGD: a practical guide*[M]. 5th ed. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2002
- [28] Wang Renhong, Li Chongjun, Zhu Chungang. *Textbook of computational geometry*[M]. Beijing: Science Press, 2008(in Chinese)  
(王仁宏, 李崇君, 朱春钢. *计算几何教程*[M]. 北京: 科学出版社, 2008)