

基于共轭-测地四边对角网的曲面优化设计

李欣烨¹⁾, 王慧^{2)*}

¹⁾(同济大学土木工程学院 上海 200092)

²⁾(西安交通大学数学与统计学院 西安 710000)
(huiwang@xjtu.edu.cn)

摘要: 过特殊曲线的曲面设计是 CAD 领域中的经典问题, 在自由建筑曲面的优化设计中有着重要的应用。针对自由建筑曲面设计中四边网格的非平面性引发的幕墙加工成本高和结构力学性能不足的难题, 提出一种基于共轭四边网与测地四边网的混合对角网的曲面优化设计方法。首先构建混合四边网的模型, 并提出一种结合几何约束与交互设计的优化算法, 实现混合四边网的高效构造; 然后针对自由建筑曲面的具体设计需求, 提供一个全面的设计方案, 包括初始网格生成、交互式形态调整和结构形式设计。基于以上方法构建 3 项曲面屋顶设计案例, 案例分析结果表明, 所提方法不仅确保幕墙单元的平面性, 而且通过优化测地对角索的布局显著地提高了结构的稳定性; 该方法兼具几何精确性和工程可行性, 为大型复杂自由建筑曲面的轻量化和低成本设计提供了一种解决方案。

关键词: 共轭四边网; 测地四边网; 混合四边网; 曲面优化设计; 建筑几何
中图分类号: TP391.41 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2025-00229

Surface Optimization Design Based on Conjugate-Geodesic Quadrilateral Diagonal Mesh Duality

Li Xinye¹⁾ and Wang Hui^{2)*}

¹⁾(College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092)

²⁾(School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710000)

Abstract: The design of surfaces with special curves is a classic topic in the field of CAD and has important applications in the optimization of free-form architectural surfaces. To address the challenges of high manufacturing costs for façades caused by the non-planarity of quadrilateral meshes and the inherent structural instability of quadrilateral gridshells in the design of free-form architectural structures, this paper proposes a surface optimization design method based on a hybrid diagonal mesh combining conjugate quadrilateral nets and geodesic quadrilateral nets. First, a model of the hybrid quadrilateral mesh is constructed, and an optimization algorithm combining geometric constraints with interactive design is presented to achieve efficient construction of the hybrid quadrilateral mesh. Then, according to the specific design requirements of freeform architectural surfaces, a comprehensive design scheme is provided, including initial mesh generation, interactive form adjustment, and structural form design. Based on the above method, three surface roof design cases were constructed. Case analysis results show that the proposed method not only ensures the planarity of façade units, but also significantly improves structural stability through optimization of the geodesic diagonal cable layout. This method combines geometric accuracy with engineering feasibility, providing a solution for lightweight and low-cost design of large, complex freeform architectural surfaces.

收稿日期: 2025-06-30; 修回日期: 2025-09-10。基金项目: 国家自然科学基金 (12501532); 西安交通大学青年拔尖人才支持计划 (11303225010702)。李欣烨 (1996—), 女, 博士研究生, 主要研究方向为计算几何、结构工程; 王慧 (1990—), 女, 博士, 副教授, 博士生导师, CCF 会员, 论文通信作者, 主要研究方向为计算机图形学、计算机辅助设计、建筑几何。

Key words: conjugate quadrilateral net; geodesic quadrilateral net; hybrid quadrilateral net; surface optimization method; architectural geometry

插值给定曲线的曲面构造是 CAD 领域中经典的逆向设计问题,源于曲面补洞、曲面造型等实际需求。该问题中,插值曲线通常被要求为目标表面上的特殊曲线,如测地线、主法曲率线和渐近线等^[1],已有众多学者针对此问题开展了大量研究工作^[2-18]。

测地线是平面上直线在表面上的对应曲线,其刻画了表面上 2 点间的最短路径,在航空航天、航海、数控加工、机器人路径规划、动画制作、图像处理 and 建筑结构等多个领域都具有重要应用价值;特别是在制鞋和服装等曲面设计领域,插值于给定 1 条或多条测地线的曲面构造应用广泛。相关的计算几何理论也得到了深入研究,如构造插值 1 条测地线的参数曲面^[2]、3 条封闭测地线的三角 Coons 曲面片^[3]和 4 条封闭测地线的 Bézier 曲面片^[4-5]等。

主法曲率线是表面上的基本曲线,具有正交的共轭关系,在表面上总是成对出现,在曲面绘制、形状识别和曲率分析等问题中发挥着重要作用。在造船行业中,插值于给定曲线为曲面主法曲率线的曲面构造具有重要的应用价值,相应的数学理论包括插值 1 条曲率线的参数曲面^[6,8]、插值 4 条封闭曲率线的有理曲面片^[9]和 B 样条曲面片^[10]等。

渐近线是微分几何中一类重要的曲线,其成对出现且仅存在于负曲率的表面上,广泛应用于天文、机械和建筑等领域。当前,构造插值给定曲线为表面上的渐近线的研究也较为深入,包括插值 1 条曲线的参数曲面^[11-12]和插值 4 条封闭渐近线的曲面片^[13-16]等。

通常,插值 1 条或有限条特殊曲线的曲面构造步骤如下:

Step1: 确定给定曲线的参数表达式。

Step2: 基于曲线的 Frenet 标架和曲线在表面上的 Darboux 标架,确定曲率特征约束下的曲线。

Step3: 反向推导出插值曲面应满足的几何约束条件。

Step4: 通过极小化薄板能量函数等目标确定相应的曲面参数表达式。

然而,这个流程往往会面临求解参数量大、重构曲面次数高、计算效率低等问题。当将该方法推广到过特殊曲线参数网的曲面设计时^[17-18],情况将变得更加复杂,大大降低对光滑曲面的次数、形态和自由度的可控性。

随着离散微分几何的发展^[19],过特殊参数曲线的曲面设计问题被转化为过相应离散曲线的网格设计问题^[20-21]。网格是由节点、边和面构成的离

散化数据结构,因其极高的可操作性和可编辑性,被广泛应用于游戏、动画和工业设计等行业,成为一种通用的形态表达形式。按照拓扑结构,网格可以分为四边网格、三角网格和混合网格等。其中,四边网格由于具有规则化的节点连接模式与良好的视觉通透性,在自由建筑曲面网格结构优化领域展现出显著的研究价值^[22-23]。四边网格是曲面参数化表达的离散化对应,贯穿其中的多边线则是表面上参数线的离散化对应,因此,构造过给定曲线的曲面设计问题被转化为具有满足特殊曲率特征的网格线的四边网优化问题。

构造满足特殊曲率特征的四边网的关键是对特殊曲率线的几何分析与构造。良好的离散化定义不仅要遵循其光滑性质^[1],还应具有简单的表达形式,以适应复杂的曲面设计以及 CAD 软件的快速交互编辑需求,如基于测地平行坐标系^[1]构造的具有 1 族测地线的四边网格^[24]、基于测地网理论^[25]构造的离散测地网 (discrete geodesic quadrilateral net, G-net)^[26]、基于主法曲率网理论^[1,19]构造的以圆网^[19]、锥网^[27]和正交共轭网^[28-29]表示的离散主法曲率网 (discrete principal curvature quadrilateral net, PC-net)、基于渐近线理论构造的离散渐近网 (discrete asymptotic net, A-net)^[30-33]等。这些离散曲面的构造通过局部格点、边线或者面的几何约束实现全局四边网格的优化,具有简单的几何约束形式,避免了光滑表面上的理论分析与烦琐的计算,与传统插值曲线的光滑曲面构造问题相比,具有更高的效率。同时,四边网的细密程度可控,更易于快速地交互编辑,也可以在足够密的情况下逼近光滑曲面,保证曲线在表面上的曲率特征。

G-net、PC-net、A-net 等四边网的研究不仅推动了微分几何^[1]离散化理论^[19]的发展,还因其在建筑结构设计中解决了诸多几何问题,促进了建筑几何^[22-23]领域的发展。本文结合 G-net 与建筑几何领域最常用的离散共轭四边网 (discrete conjugate quadrilateral net, Q-net)^[19]或 PQ mesh^[22],提出一种构造互为对角的 Q-net 与 G-net 的混合四边网建模方法,旨在指导自由建筑曲面的设计,进一步推广过特殊曲线的曲面设计在建筑领域的应用。

1 相关工作

在自由建筑网格结构的设计中,网格形式的选

择不仅影响结构的形态和美观度,还决定着结构最终的节点形式、复杂度,以及结构的受力形式和稳定性。三角形网格因其天然的几何稳定性表现出良好的结构力学性能,受到设计师的青睐,图 1 所示为三角网在建筑表面上的应用——大英博物馆中庭。然而,三角形网格存在节点形式复杂(每个节点通常需要连接 6 根杆件)、用料较多自重大、视觉通透性较差等问题。



图 1 大英博物馆中庭

四边网格凭借其规则的拓扑结构和低复杂度的节点连接特性,显著地提升了建筑表皮视觉效果,成为复杂几何构造的首选方案^[22-23,34-35]。然而在实际工程中,四边网格结构面临双重挑战:(1)空间四边形的非平面性导致幕墙单元需要进行三维弯扭加工,使得制造成本高于平面幕墙构件的三角形网格;(2)在结构稳定性方面,纯四边网格更容易发生面内屈曲,其临界荷载值通常低于等效的三角形网格。

针对上述问题,现有的解决方案如下:对于四边网格非平面性引发的建造难题,采用具有平面四边形特性的 Q-net 进行设计^[22],减少异形板材的种类,典型的工程案例包括如图 2a 所示墨尔本 Chadstone 购物中心屋顶。对于四边网格的结构稳定性问题,工程实践中常引入双向对角索进行强化^[33,36-37],如柏林动物园河马馆屋顶结构,如图 2b 所示,具体做法是在平面四边形单元中沿对角线方向布置预张力索,其力学优势体现在 3 个方面:(1)通过增加对角索形成三角形子结构,提升四边形单元抗剪刚度(抵抗剪切变形的能力),从而提高结构的面外稳定性;(2)当对角索与表面上的测地线方向一致时,索路径能够实现张力传递效率的最大化,这些索实际上是表面上 2 点间最短路径的离散化表现;(3)通过预张力设计,保证在任意荷载工况下至少有一个方向的索处于激活状态,避免整体失稳。

由此,2 族对角索形成一个新的四边网,即基础控制四边网的对角四边网;反之,当给定对角网作为控制网时,其对角网则是原控制网。控



a. 墨尔本 Chadstone 购物中心 b. 柏林动物园河马馆

图 2 四边网在建筑表面上的应用

制四边网和对角四边网形成互为对角的关系,二者共同构成对同一曲面的不同表示形式,它们的组合形成了一个 4 族曲线网(4-网),即由 4 族曲线构成的三角网。

以控制四边网为基础网,通过增加 1~2 族对角线的约束构造的混合 3-网或 4-网的方法,比直接对给定三角网进行指定方向的优化方法更加可控。该方法在构造以 A-net 为控制网、以 1 族对角线为测地线的 AAG-网,以 G-net 为控制网、以 1 族对角线为渐近线的 AGG-网,以及以 A-net 为控制网、以 G-net 为对角网的 AGAG-网的研究中^[36],发挥了显著的表达与建模优势。这类网格基于 2 类方向的可展平面直板件构成:一类沿渐近线布置,生成垂直于曲面切平面的板件;另一类沿测地线布置,生成平行于曲面切平面的板件。2 类板件均具有可展性与直边性,有利于加工制造;同时,它们在曲面上处处互相垂直,既提供了结构的面内和面外刚度,也赋予了网壳结构设计建造的自由度与稳定性^[37]。

在离散微分几何的研究中,Q-net 作为一种重要的几何表示被广泛讨论^[19],它是光滑曲面上共轭曲线网的离散化表达,其几何特征是四边形 4 个顶点共面,即对角线交点处的切平面共面。这种结构不仅在理论研究中具有重要意义,还广泛应用于计算机图形学和建筑设计等领域。测地线是曲面上具有最短路径特性的曲线,在建筑几何和自由曲面设计中,测地线的应用价值体现在其能够为结构优化和路径规划提供理论支持^[38]。因此,结合测地线与 Q-net 的几何特性,研究具有对角 G-net 的 Q-net,以及具有对角 Q-net 的 G-net,具有重要的实际意义。

上述各种混合网格的特征对比如表 1 所示。

表 1 混合网格对比

名称	类型	控制网	控制网特征	对角线/网特征
AAG ^[36]	3-网	A-net	密切面平行切平面	密切面垂直切平面
AGG ^[36]	3-网	G-net	密切面垂直切平面	密切面平行切平面
AGAG ^[36]	4-网	A-net	密切面平行切平面	密切面垂直切平面
QDG	4-网	Q-net	平面四边网	最短路径
GDQ	4-网	G-net	最短路径	平面四边网

2 互为对角的共轭网和测地网

基于工程应用的实际需求，本文聚焦于互为对角网的 Q-net 和 G-net 的研究及其应用。首先分别探讨曲线在曲面上的曲率特征，以及构成 Q-net 和 G-net 的几何特征；然后讨论混合 4-网的表达和构成。

2.1 Q-net

共轭曲线是曲面上的基础曲线^[1,19]，它们成对出现，可以有无数对。任意给定 1 条曲线及其方向（蓝色），可以通过 Dupin 标形^[31]找到相应的另 1 条曲线。如图 3a 所示，1 条在曲面的椭圆点处，另 1 条为椭圆上的共轭直径方向（红色）。

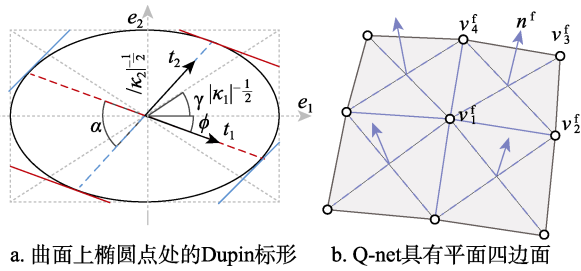


图 3 共轭向量与 Q-net 的几何性质

在曲面 S 上的任意点 p ，存在 2 个主曲率方向 e_1 和 e_2 ，对应的主曲率分别为 κ_1 和 κ_2 ，这 2 个方向相互垂直，可以张成点 p 处的切平面 Γ 。在 Γ 上，可以定义 1 个局部笛卡儿坐标系，其坐标轴分别沿着 e_1 和 e_2 的方向。对于通过点 $p \in S$ 的 1 条曲线，其切向量为 $t = (\cos\phi, \sin\phi)$ ，其中，角度 ϕ 是相对于 e_1 测量的，该曲线的法曲率 κ_n 满足欧拉公式

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2\phi + \kappa_2 \sin^2\phi。$$

在这个局部坐标系中，如果 1 条切线是某条曲线的切线，而另 1 条切线是该曲线上各点处切平面的包络的母线向量，则这 2 条切线是共轭的。2 个共轭方向可以用复数形式分别表示为 $t_1 = \cos\phi + i\sin\phi = e^{i\phi}$ 和 $t_2 = e^{i\theta} \cdot t_1 = e^{i(\phi+\theta)}$ ，它们满足以下关系

$$(\kappa_2 - \kappa_1)\cos(2\phi + \theta) = (\kappa_1 + \kappa_2)\cos\theta \quad (1)$$

其中， θ 表示 2 个共轭方向之间的夹角。特别地，当 $\phi=0$ ，即 1 条曲线沿着曲面的主法曲率方向，则只有共轭向量夹角满足 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，式 (1) 成立；此时，另 1 条曲线沿着另 1 条主法曲率方向，与主法曲率参数网是正交的共轭网概念一致^[1]。对于给定的共轭向量夹角 θ_0 ，夹角 ϕ 求解公式为

$$\phi = \left[\arccos\left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2 + \kappa_1} \cos\theta_0\right) - \theta_0 \right] / 2。$$

定义 1^[19]：给定光滑曲面的参数化表示 $X:(u, v) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(u, v) \subset \mathbb{R}^3$ ，如果 X 满足 $\partial_u \partial_v X \in \text{span}(\partial_u X, \partial_v X)$ ，则称 X 为共轭网。

$\partial_u \partial_v X \in \text{span}(\partial_u X, \partial_v X)$ 表示参数化 $X(u, v)$ 对 u 和 v 的偏导向量位于由 X 对 u 和 v 的偏导向量张成的平面内，即 X 的第二基本形式是对角化的。因此，共轭网的离散化定义为具有平面四边形的四边网格^[19,22,27]。

定义 2^[19]：映射 $X:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 被称为 Q-net，如果四边网 X 的所有基本四边形面均为平面。

Q-net 的几何特征通过每个四边形的 4 个格点满足共面条件进行局部表达，如图 3b 所示。对于共平面的 4 个顶点 $v_i^f (i=1,2,3,4)$ ，可以通过引入单位法向量 n^f 进行约束，即

$$\|n^f\|^2 = 1, n^f \cdot (v_i^f - v_{i-1}^f) = 0, i = 2,3,4 \quad (2)$$

这种离散化的定义方式具有简洁的表达形式，为基于 Q-net 曲线网的理论与应用奠定了基础^[19,28]。

2.2 G-net

曲面 S 上的曲线 $c(s)$ （以弧长参数 s 表示）的曲率 $\kappa = |c''(s)|$ 可以分解为法曲率 κ_n 和测地曲率 κ_g 这 2 部分，它们分别是曲率向量 c'' 在曲面法向量和切平面上的 2 个投影，如图 4a 所示。这 3 个曲率元素之间存在关系 $\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$ 。设 α 为 c'' 与曲面法向量之间的夹角，则 $\kappa_n = \kappa \cos\alpha$ ， $\kappa_g = \kappa \sin\alpha$ 。 α 在整条曲线上的取值有 2 个特殊情况，即 $\frac{\pi}{2}$ 和 0，它们定义了表面上的 2 种特殊曲线。当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时，曲线为渐近曲线，其法曲率 $\kappa_n = 0$ ，曲率向量位于切平面上；当 $\alpha = 0$ 时，曲线为测地线，其测地曲率 $\kappa_g = 0$ ，曲率向量 c'' 与曲面法向量平行。

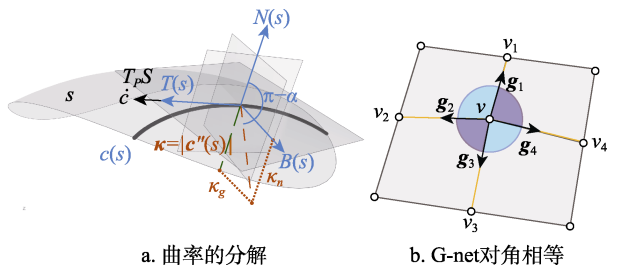


图 4 测地曲率与 G-net 的几何性质

与表面上的渐近线成对出现且限制了曲面的弯曲形态(只为负曲率)不同, 表面上的测地线存在无数条, 连接表面上任意 2 点的最短路径就是测地线, 不同的 2 个端点得到不同的测地线。表面上测地线的构造方式还可以通过给定点与方向逐步生成构造, 过程如下: 给定表面上 1 点和某个切方向, 曲面的法向量与该方向张成的平面与曲面的交线为曲线的局部测地线; 继续选择交线上的点, 再指定某个方向, 可以以相同的方式确定新的局部测地线; 重复以上过程, 可以实现给出 1 族定点与方向的测地曲线段。如果这些点构成了表面上光滑连续曲线, 则曲线的切向量与曲面法向量张成的曲面与曲线的密切面一致, 该曲线即为测地线。

由表面上 2 族测地线相交构成的四边网是曲面的测地网, 每条曲线的密切面过曲面法向量, 2 族曲线交点处的面法向量与 2 族曲线的密切面交线共线, 表面上的测地网刻画了表面上具有零测地曲率的曲线四边网, 根据测地曲率的内蕴不变性, 经过等距变换的测地网仍然是测地网。

定义 3^[25-26]: 映射 $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 被称为 G-net, 如果在四边网 X 的每个正则格点星处, 2 组相对的边夹角相等。

在四边网中, 每个格点与其相邻格点共有的边形成 1 个格点星。当边数为 4 时, 该格点星是正则的, 存在 4 个网面夹角, 即 4 个邻边夹角。对于有边界的曲面, 还存在网格的边界点或角点格度为 2 或 3 的情形, 本文对这类格点不做处理。此外, 本文对封闭曲面存在奇异点的格点也不做处理, 这是本文方法的局限之处。因此, 只需在四边网的每个正则格点星处定义离散 G-net, 满足 2 组相对的邻边夹角相等, 如图 4b 所示, 公式为

$$g_i = \frac{v_i - v}{\|v_i - v\|}, i=1,2,3,4 \quad (3)$$

其中, g_i 表示从格点发出沿着 4 条边线的单位向量, 且 $g_1 \cdot g_2 = g_3 \cdot g_4$, $g_2 \cdot g_3 = g_4 \cdot g_1$ 。该局部几何特征刻画了离散曲线网的零测地曲率特征。

G-net 可以表示和构造离散可展曲面。离散可展曲面在 G-net (黄色) 的基础上, 只需满足每个格点处 4 个网面夹角相等 (如图 5a 所示), 形成 DOG (discrete orthogonal geodesic) 网^[26], 该表示方式为可展曲面的自由形态探索和曲面的可展近似等任务提供了简洁且高效的算法。可展曲面具有零高斯曲率的特征, 因为高斯曲率是内蕴不变量, 可保证可展曲面与平面的等距映射关系, 所以可展

表面上的 G-net 可以“平铺”到平面, 形成由直线段构成的直线四边网, 同时满足曲线长度和夹角不变性。当 G-net (黄色) 也是曲面的共轭网 (紫色), 即 2 族曲线在交点处的切方向共轭时, 形成的四边网称为 Voss 网^[39]。如图 5b 所示, Voss 网是离散常负高斯曲率网的对偶网^[40], 包含平面四边形和离散直线多边形, 其在等距变换下沿着直线段作为铰链进行旋转变换^[41], 形成刚性变换, 常被应用于网壳结构^[42-44]、可展开结构^[40]和折纸结构^[45]等。Voss 网的全局形态受局部面片移动的牵连, 形变过于严苛, 不利于曲面的设计。

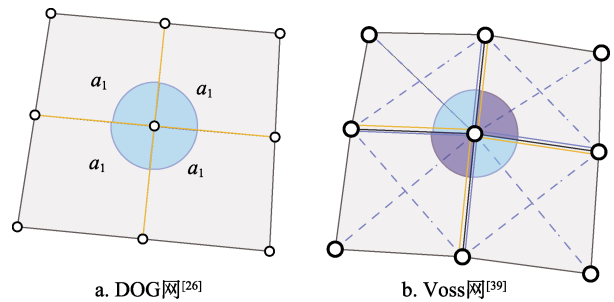


图 5 基于 G-net 的拓展四边网的几何性质

当 G-net 出现在 Q-net 的对角方向, 或者 G-net 的对角方向为共轭方向时, 形成互为对角关系的 Q-net 和 G-net, 此时曲面形态具有更多的自由度, 便于曲面设计和工程应用。

2.3 混合 4-网

以 Q-net 和 G-net 分别为控制网和对角网, 或分别为对角网和控制网的四边网构成混合 4-网。给定 1 个光滑曲面的参数化表示 $X: (u, v) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(u, v) \subset \mathbb{R}^3$, 存在 1 个对角参数化表示 $Y(u, v)$, 定义为 $Y(u, v) = X(u - v, u + v)$ 。在这种参数化下, 偏导数为 $Y_u = X_u - X_v$ 和 $Y_v = X_u + X_v$ 。这 2 个参数化表示 $X(u, v)$ 和 $Y(u, v)$ 构成 1 个 4-网, 其在组合上等价于 uv 平面上的直线族 $u = \text{常数}$, $v = \text{常数}$, $u + v = \text{常数}$ 和 $u - v = \text{常数}$ 。

定义 4: 映射 $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 与其对角映射 $Y(u, v) = X(u - v, u + v)$ 构成 1 个混合 4-网, 当 $X(u, v)$ 为 Q-net, $Y(u, v)$ 为 G-net, 或者 $X(u, v)$ 为 G-net, $Y(u, v)$ 为 Q-net 时。

当 Q-net (紫色) 的对角网为 G-net (黄色) 时 (如图 6a 所示), 其网格特征如下: 在每个正则格点星处, 四边形网面均为平面, 即满足式 (2); 通过格点的 2 个相对四边形网面的对角线连线构成

离散测地线,即正则格点星的 4 个对角线满足式(3)的对角相等条件^[36]。当所有格点满足这一联合条件的四边网时,即为具有对角 G-net 的 Q-net。

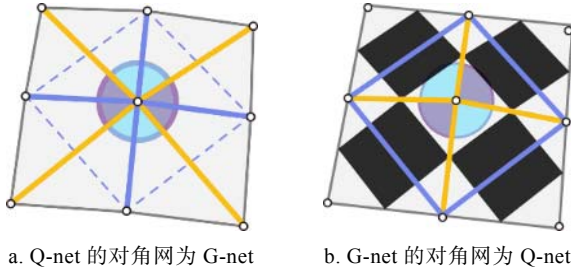


图 6 2 类混合 4-网的几何特征

定义 5: 当四边网的每个面都是平面,并且其对角四边网的 2 组相对的边夹角相等时,构成 Q-net 与 G-net 的混合 4-网,其中,四边网是 Q-net。

当 G-net (黄色)的对角网为 Q-net (紫色)时(如图 6b 所示),可以采用类似的方法寻找满足四边形网面为平面的对角四边网。此时,每个格点星满足 G-net 条件,即式(3),且相邻 4 个四边形网面上,不过格点的对角线能够形成 1 个四边形网面,该网面满足式(2)。进一步分析该四边形网面,由三角形的相似性可知,其 4 条边分别平行于格点星的 4 个边中点连线构成的 4 条边,对角网的共轭性由该小四边网的平面性决定。这种小四边形网面也被称为对角网棋盘格图案 (checkboard pattern, CBP)^[28]中的白格,其相邻的 4 个网面为黑格;因为四边网的对边分别平行且相等,所以黑格自然是平面的,从而构成平行四边形。这样,具有平面性的白格和黑格共同构成控制网的细分对角网,即 Q-net。基于该 Q-net,PC-net 和离散等温网 (isothermal net) 可以被定义,并应用于曲面参数化与自由曲面设计^[28]。

定义 6: 当四边网的每个正则格点星处 2 组相对的边夹角相等并且其 CBP 为平面时,构成了 G-net 与 Q-net 的混合 4-网,其中,四边网是 G-net。

3 优化算法

基于第 2 节的混合 4-网理论,本文联合几何约束、光滑约束、解距离控制约束和交互优化约束提出优化算法,并给出算法的伪代码,实现该类四边网的高效设计与动态调整。

3.1 约束方程与优化算法

本文采用 Guided-Projection 算法^[46]进行数值优化,求解这个建筑几何问题。该算法基于半边数

据结构作为网格的存储形式,以格点坐标作为基本变量空间,根据约束形式,额外引入面法向量、边单位向量等辅助变量形成整体变量空间;在每个局部格点星处建立不高于 2 次^[46]的约束方程,集成约束能量函数总和,采用高斯-牛顿算法实现快速优化迭代求解。求解能量的方程为

$$E = E_{Q-net} + E_{G-net} + \omega_{fair} E_{fair} + \omega_{self} E_{self} \rightarrow \min \quad (4)$$

式(4)中的变量解释如下:

(1) 几何约束项 E_{Q-net} 根据式(2)得到

$$E_{Q-net} = \sum_{f=1}^{|F|} \sum_{i=2}^4 \left[\mathbf{n}^f \cdot (\mathbf{v}_i^f - \mathbf{v}_{i-1}^f) \right]^2 + \sum_{f=1}^{|F|} (\mathbf{n}^f \cdot \mathbf{n}^f - 1)^2。$$

其中, $|F|$ 表示四边网网格面总数。

(2) 几何约束项 E_{G-net} 根据式(3)得到

$$E_{G-net} = \sum_{i=1}^{|V|} \left[(\mathbf{g}_{i1} \cdot \mathbf{g}_{i2} - \mathbf{g}_{i3} \cdot \mathbf{g}_{i4})^2 + (\mathbf{g}_{i2} \cdot \mathbf{g}_{i3} - \mathbf{g}_{i4} \cdot \mathbf{g}_{i1})^2 \right] + \sum_{i=1}^{|V|} \sum_{j=1}^4 \left(\mathbf{g}_{ij} - \frac{\mathbf{v}_{ij} - \mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_{ij} - \mathbf{v}_i\|} \right)^2。$$

其中, \mathbf{g}_{ij} 表示边单位向量; $|V|$ 表示四边网中正则格点总数; $\|\mathbf{v}_{ij} - \mathbf{v}_i\|$ 表示来自上一次迭代的已知项。

根据第 2.3 节所述,混合 4-网的优化需要注意控制网类型的选取。当选择控制网为 Q-net 进行优化时,G-net 约束施加在对角网格上(式(4)中 E_{Q-net} 与 E_{G-net} 优化的网格不是同一个网格,而是互为对角网),本文将这种优化方式简称为共轭对角测地 (Q-net with diagonal net as G-net, QDG) 优化;反之,当选择 G-net 作为控制网进行优化时,相应地, Q-net 约束施加在控制网的对角网上,本文将这种优化方式简称为测地对角共轭 (G-net with diagonal net as Q-net, GDQ) 优化。

(3) 实际求解过程中,为了避免解空间大范围波动导致求解失败,引入光滑能量函数 E_{fair} 和解距离控制函数 E_{self} 指导解空间的变化,引导其高效地靠近目标形态,并引入相应的权因子 ω_{fair} 和 ω_{self} , 分别控制 E_{fair} 和 E_{self} 在不同优化项目中的权重。 E_{fair} 的形式为

$$E_{fair} = \sum_{i \in \text{polyline}} (2v_i - v_{iL} - v_{iR})^2。$$

其中, v_i 、 v_{iL} 和 v_{iR} 分别表示多段线上的 3 个连续点,对 E_{fair} 最小化可以看作将参数曲线的二阶导数最小化。 E_{fair} 的优势是能够高效地保证目标曲面的光滑性,缺点是过高权重会将曲面“拉平”。

E_{self} 的形式为

$$E_{\text{self}} = \sum_{i=1}^{|V|} (v_i - v_{i\text{pre}})^2。$$

其中, $v_{i\text{pre}}$ 表示格点上一次迭代的位置信息。 E_{self} 能很好地控制形态不出现大幅度变化, 而是在原曲面“周围”求最优解。

3.2 交互优化设计

针对设计需求, 该算法增设了交互优化设计功能, 包括格点拖拽、参考曲面逼近和边界滑动。

(1) 格点拖拽功能。用户可以通过格点拖拽实时、动态地调整网格形态, 当 p 点被拖拽到 p_d 点时, 在式 (4) 中引入额外能量项 E_{drag} 约束, 可以实时地更新优化后的结果。 E_{drag} 定义为

$$E_{\text{drag}} = (v_p - v_{pd})^2。$$

(2) 曲面逼近功能。用户输入参考网格, 算法可以优化初始网格逼近目标参考网格形态。该约束要求初始网格上某格点 v_i 到参考曲面最近格点 p_i 处的切平面 (法向量为 \mathbf{n}^{ki}) 的距离最近。 E_{ref} 定义为

$$E_{\text{ref}} = \sum_{i=1}^{|V|} [(v_i - p_i) \cdot \mathbf{n}^{ki}]^2。$$

(3) 边界滑动功能。与曲面近似是沿着最近邻点的切平面上滑动类似, 该优化要求网格边界点沿着参考曲面边界最近邻点的切方向移动。首先识别网格与参考曲面的边界; 然后找到网格边界点 v_i 与参考曲面对应边界上的最近邻点 p_i 及其 Frenet 标架 ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$); 最后约束 $v_i - p_i$ 位于 p_i 点切方向上。因此, E_{bdGlide} 定义为

$$E_{\text{bdGlide}} = \sum_{i=1}^{|V|} [(v_i - p_i) \times \mathbf{e}_1]^2$$

或

$$E_{\text{bdGlide}} = \sum_{i=1}^{|V|} \left\{ [(v_i - p_i) \cdot \mathbf{e}_2]^2 + [(v_i - p_i) \cdot \mathbf{e}_3]^2 \right\}。$$

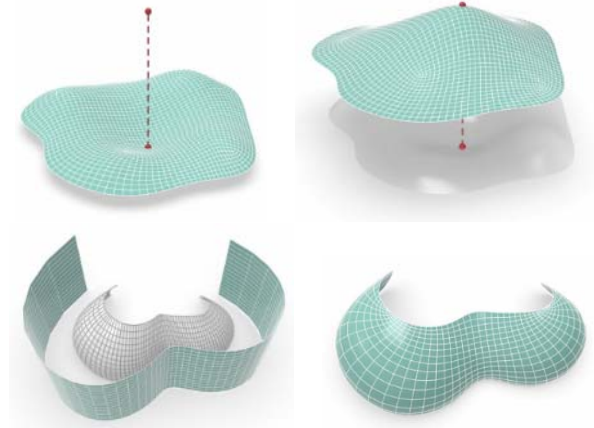
至此, 约束能量方程为

$$E = E_{\text{Q-net}} + E_{\text{G-net}} + \omega_{\text{fair}} E_{\text{fair}} + \omega_{\text{self}} E_{\text{self}} + \omega_{\text{drag}} E_{\text{drag}} + \omega_{\text{ref}} E_{\text{ref}} + \omega_{\text{bdGlide}} E_{\text{bdGlide}} \rightarrow \min \quad (5)$$

图 7 所示为交互优化设计示例。

3.3 初始化方法与优化策略

网格优化中, 初始输入网格越接近目标几何约束, 则网格优化效果越好。因此, 合理的初始输入是良好网格优化效果的保证。本文给出 2 个初始化方案, 并根据输入数据的几何特性给出不同的网格优化策略, 以确保优化效率。



a. 拖拽交互优化功能示意 b. 曲面逼近交互优化功能示意

图 7 交互优化设计示例

方案 1: 当初始网格的四边面更接近于平面 ($E_{\text{Q-net}} \leq E_{\text{G-net}}$) 时, 如来自曲面的主法曲率网, 优先选取 QDG 算法, 优化控制网为 Q-net, 优化对角网为 G-net。

方案 2: 当初始网格更接近测地网格 ($E_{\text{Q-net}} \geq E_{\text{G-net}}$) 时, 如来自可展曲面的正交测地网, 优先选取 GDQ 算法, 优化控制网为 G-net, 优化对角网为 Q-net。

在优化过程中, 通常将约束类型分为 2 大类: (1) 软约束, 用于引导优化方向的权因子 < 1 ; (2) 硬约束, 用于引导优化方向的权因子 $= 1$ 。在优化初期, 仅对 $E_{\text{Q-net}}$ 与 $E_{\text{G-net}}$ 赋予权重 1 进行优化尝试; 后续根据优化效率和结果, 同时考虑设计需求, 判断是否增加软约束能量函数。 ω_{fair} 通常从 $10^{-5} \sim 10^{-2}$ 量级依次进行尝试, ω_{self} 和 ω_{ref} 通常在 $10^{-2} \sim 10^{-3}$ 量级依次进行尝试, ω_{bdGlide} 通常在 10^{-1} 量级尝试, 具体取值根据设计需求和优化效果确定。优化过程中, 每 5 步为一组进行迭代, 初始迭代步中设置软约束为较高权重, 用于引导优化的方向; 之后每组迭代酌情考虑软约束权重是否减小, 以降低控制项的影响; 最终仅保留硬约束进行优化, 以保证主要优化目标的最终精度。本文算法步骤如下:

输入: 初始网格 M_{ini} 。

输出: 优化网格 M_{opt} 。

Step1: 读取初始网格为半边数据结构。

Step2: 计算能量函数 $E_{\text{Q-net}}$ 和 $E_{\text{G-net}}$, 并判断大小;

Step2.1: 当 $E_{\text{Q-net}} \leq E_{\text{G-net}}$ 时, 优先选取 QDG 算法进行优化;

Step2.2: 当 $E_{\text{Q-net}} \geq E_{\text{G-net}}$ 时, 优先选取 GDQ 算

法进行优化。

Step3: 对 $\omega_{\text{fair}}, \omega_{\text{self}}, \omega_{\text{ref}}, \omega_{\text{bdGlide}}$ 赋值。

Step4: 在计算求解过程中调整各项权因子的数值, 直至收敛。

Step5: 按照交互优化设计需求添加 E_{drag} 能量项, 并定义 ω_{drag} , 重新迭代求解, 直至收敛。

表 2 所示为对同一设计目标曲面分别采用 2 种方案进行优化设计的示例。

表 2 对同一设计目标曲面分别采用 2 种方案进行优化设计的示例

参考曲面	方案 1		
	初始 Q-net	QDG 优化后的控制网为 Q-net	QDG 优化后的混合 4-网
			
	方案 2		
	初始 G-net	GDQ 优化后的控制网为 G-net	GDQ 优化后的混合 4-网
			

4 建筑曲面应用设计

4.1 混合 4-网设计流程

基于本文提出的 QDG 和 GDQ 优化算法, 提出一套完整的自由建筑曲面设计流程: (1) 按照第 3.3 节确定初始网格与优化策略; (2) 通过 Guided-Projection 算法, 结合几何约束和交互式调整生成互为对角的 Q-net 和 G-net, 优化过程中需要灵活地调整权因子确保曲面形态平滑过渡; (3) 进行力学验证与施工方案生成, 此部分非本文重点, 不再赘述。

4.2 实际工程案例分析

本文实验平台如下: Intel Core i7-8650U CPU @1.90 GHz, 8 GB 内存, 64 位 Windows10 计算机。

案例 1: 场馆曲面屋顶设计。针对图 8a 所示的某一特定建筑形态, 本文对初始网格进行评估后得到 $E_{\text{Q-net}} \geq E_{\text{G-net}}$; 故采取 GDQ 算法优化生成混合 4-网, 如图 8b 所示; 最终的建筑设计渲染如图 8c 所示。为了验证四边形网壳在增设对角索后的结构稳定性, 采用 Karamba 软件进行线性特征值

屈曲分析。Karamba 软件评估结构在何种荷载下发生屈曲, 是判断结构稳定性的常用方法^[47]。分析中采用通用设置将所有边界节点铰接固定, 即节点的 3 个平动自由度被约束, 无法移动但可自由转动。在对角索后施加预应力后的结果显示, 加设测地对角索的结构屈曲特征值相较原四边形网壳增加 12%, 表明其结构稳定性有所提升。

案例 2: 基于旋转面的曲面屋顶设计。首先建立如图 9a 所示的旋转面, 该旋转面符合共轭网性质, 可知 $E_{\text{Q-net}} \leq E_{\text{G-net}}$; 故采用 QDG 算法优化为混合 4-网, 如图 9b 所示; 最后对优化后曲面进行裁剪, 得到如图 9c 所示的网格。为了验证结构的稳定性, 采用与案例 1 相同的设置, 施加测地对角索后结构屈曲特征值相较于原四边网壳提升 13%。

案例 3: 参考 Lilium Tower 曲面屋顶网格重建。选取如图 10a 所示的原始曲面作为参考曲面, 引入一个平面四边网格作为初始共轭网 (如图 10b 所示), 经过 QDG 算法优化为如图 10c 所示的混合 4-网, 对应的建筑渲染如图 10d 所示。为了验证结构的稳定性, 采用与案例 1 相同的设置, 得到施加测

地对角索后结构屈曲特征值为原四边网壳的 113%。

此外, 本文以图 8 的网格为例, 探讨网格密度对优化的影响。将图 8 中高密度网格记为 M , 原始网格的降密版本记为 M_s , 并在相同的计算策略下进行对比。结果显示: M 的优化迭代步数为 24, 最终误差在 10^{-18} 数量级; 而 M_s 的迭代步数为 14, 最终误差达到 10^{-19} 数量级。表明尽管更高密度的网格在几何表达能力上更精细, 但是由于变量数量

显著增加, 优化过程所需的迭代次数也相应增加, 甚至可能带来轻微的误差上升。鉴于本文聚焦于建筑结构的实际应用, 尤其是面向玻璃面板的制造要求 (通常在 $5\sim 9\text{ m}^2$ 的尺寸范围内), 因此未进一步展开网格密度对算法性能影响的讨论, 而是采用了更具实际工程可行性的原始网格密度进行分析。

对图 7 和表 2 所示示例, 以及图 8~10 所示的案例 1~3, 其优化数据信息如表 3 所示。

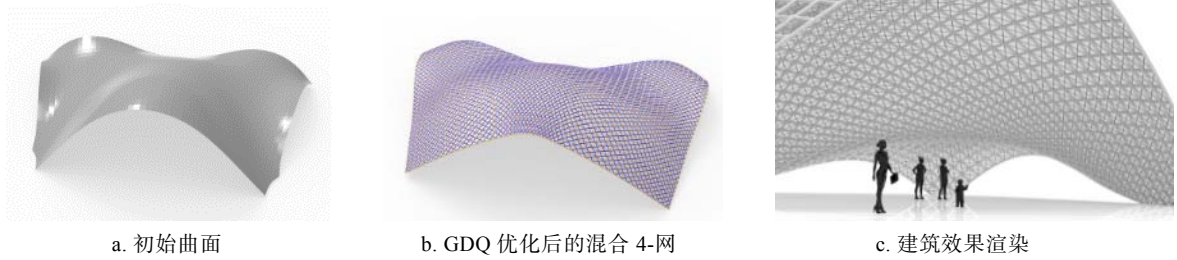


图 8 场馆曲面屋顶优化与设计



图 9 基于旋转面的曲面屋顶优化与设计

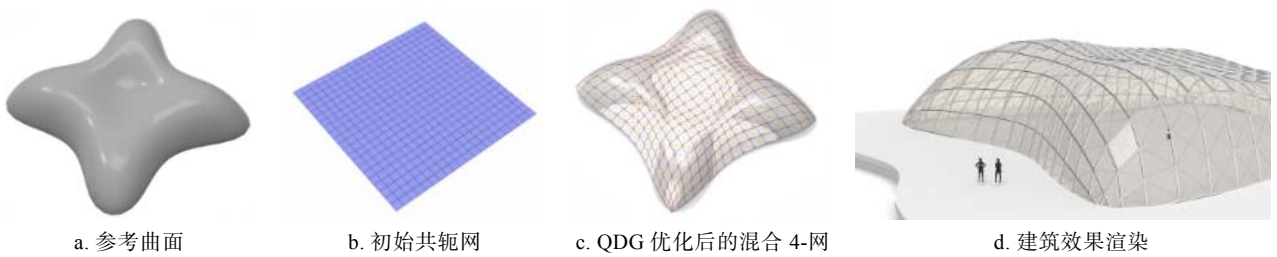


图 10 近似重建 Lilium tower 顶部的优化与设计

表 3 计算案例优化数据信息

案例	$ V $	$ F $	$ E $	变量	约束	ω_{fair}	ω_{self}	ω_{drag}	ω_{ref}	ω_{bdGlide}	时间/s
图 7a	1960	1900	3859	27481	57324	0.001		1		0.1	0.573
图 7b	656	600	1255	12641	25947	0.0001			0.20	0.1	0.351
表 2 方案 1	816	750	1565	15674	33273	0.1			0.20	0.2	0.341
表 2 方案 2	946	945	1890	19064	40631	0.0001			0.10	0.1	0.420
图 8	7404	1851	7404	41298	84793	0.0001					0.762
图 9	612	561	1172	11711	24667	0.001	0.01			0.01	0.298
图 10	240	200	439	9175	19507	0.01			0.02	0.02	0.276

5 结 语

针对自由建筑曲面设计中四边网格存在的非平面性与较弱的结构面外稳定性问题, 本文提出基于共轭-测地四边对角网的曲面优化设计方法。将互为对角的共轭网与测地网引入建筑几何领域, 构建混合 4-网的理论框架, 实现了共轭性与测地性的对角协同优化; 基于高效的优化求解算法, 结合几何约束和交互编辑设计, 优化速度达到 0.1 s 量级, 满足工程设计领域的实时性要求。实际工程案例结果表明, 在保证设计效率的前提下, 混合 4-网可以保证平面单元的施工经济性要求; 同时, 沿测地线布置的预张力索达到传力效率最优, 可显著地提升结构稳定性, 为复杂自由建筑曲面设计提供了新的方法。

未来, 将扩展初始化网格的生成方法, 以及对该类结构体系(平面网壳承压、索体受拉)的具体受力特性进行力学分析。

参考文献 (References):

- [1] do Carmo M P. Differential forms and applications[M]. Berlin: Springer, 1994
- [2] Wang G J, Tang K, Tai C L. Parametric representation of a surface pencil with a common spatial geodesic[J]. Computer-Aided Design, 2004, 36(5): 447-459
- [3] Farouki R T, Szafran N, Biard L. Construction and smoothing of triangular Coons patches with geodesic boundary curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2010, 27(4): 301-312
- [4] Farouki R T, Szafran N, Biard L. Construction of Bézier surface patches with Bézier curves as geodesic boundaries[J]. Computer-Aided Design, 2009, 41(11): 772-781
- [5] Yang Huogen. Optimized design of surface through the geodesics[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2014(in Chinese)
(杨火根. 过测地线的曲面优化设计[D]. 杭州: 浙江大学, 2014)
- [6] Li C Y, Wang R H, Zhu C G. Parametric representation of a surface pencil with a common line of curvature[J]. Computer-Aided Design, 2011, 43(9): 1110-1117
- [7] Li C Y, Wang R H, Zhu C G. A generalization of surface family with common line of curvature[J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 219(17): 9500-9507
- [8] Li Caiyun. Some researches on curve and surface modeling[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2013(in Chinese)
(李彩云. 曲线曲面造型中的若干相关问题研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2013)
- [9] Biard L, Farouki R T, Szafran N. Construction of rational surface patches bounded by lines of curvature[J]. Computer Aided Geometric Design, 2010, 27(5): 359-371
- [10] Wang Fei. Construction of B-spline surfaces interpolating curvature and feature curves[D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2018(in Chinese)
(王飞. 插值曲率线与特征线的 B 样条曲面构造[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2018)
- [11] Bayram E, Güler F, Kasap E. Parametric representation of a surface pencil with a common asymptotic curve[J]. Computer-Aided Design, 2012, 44(7): 637-643
- [12] Atalay G Ş, Kasap E. Surfaces family with common null asymptotic[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 260: 135-139
- [13] Wang Hui, Zhu Chungang, Li Caiyun. Construction of rational Bézier surface interpolating asymptotic quadrilateral[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2017, 29(8): 1497-1504(in Chinese)
(王慧, 朱春钢, 李彩云. 插值有理 Bézier 渐近四边形的有理 Bézier 曲面[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2017, 29(8): 1497-1504)
- [14] Wang H, Zhu C G, Li C Y. Construction of B-spline surface from cubic B-spline asymptotic quadrilateral[J]. Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing, 2017, 11(4): Article No.JAMDSM0044
- [15] Wang H, Zhu C G, Li C Y. The design of Bézier surface through quintic Bézier asymptotic quadrilateral[J]. Journal of Computational Mathematics, 2019, 37(5): 720-737
- [16] Wang Xinxuan. The study of asymptote on surface and its application[D]. Tongliao: Inner Mongolia Minzu University, 2024(in Chinese)
(王新璇. 曲面上渐近线及其应用研究[D]. 通辽: 内蒙古民族大学, 2024)
- [17] Mao Xiaohong. Optimization design of surface through geodesic network[D]. Ganzhou: Jiangxi University of Science and Technology, 2020(in Chinese)
(毛小红. 过测地线网的曲面优化设计[D]. 赣州: 江西理工大学, 2020)
- [18] Martin R R. Principal patches for computational geometry[D]. Cambridge: University of Cambridge, 1982
- [19] Bobenko A I, Suris Y B. Discrete differential geometry: integrable structure[M]. Providence: American Mathematical Society, 2008
- [20] Shou Huahao, Wu Xiaojing, Yang Lin. Constructing discrete surface through given discrete geodesics[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2019, 31(5): 736-742(in Chinese)
(寿华好, 吴晓婧, 杨霖. 以多条离散曲线为测地线构造离散曲面[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2019, 31(5): 736-742)
- [21] Yang Lin. Constructing discrete surface through a given feature geodesic[D]. Hangzhou: Zhejiang University of Technology, 2018(in Chinese)
(杨霖. 以离散曲线为特征线的离散曲面设计[D]. 杭州: 浙江工业大学, 2018)
- [22] Pottmann H, Asperl A, Hofer M, et al. Architectural geometry[M]. Exton: Bentley Institute Press, 2007
- [23] Wang Hui. Construction of mesh and smooth surfaces in architectural geometry[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2020(in Chinese)
(王慧. 建筑几何中的网格与光滑曲面构造[D]. 大连: 大连

- 理工大学, 2020)
- [24] Wang H, Pellis D, Rist F, *et al.* Discrete geodesic parallel coordinates[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2019, 38(6): Article No.173
- [25] Wunderlich W. Zur Differenzengeometrie der Flächen konstanter negativer Krümmung[J]. *Sitzungsberichte der Österreichischen Akademie der Wissenschaften Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse II*, 1951, 160: 39-77
- [26] Rabinovich M, Hoffmann T, Sorkine-Hornung O. Discrete geodesic nets for modeling developable surfaces[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2018, 37(2): Article No.16
- [27] Liu Y, Pottmann H, Wallner J, *et al.* Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2006, 25(3): 681-689
- [28] Peng C H, Jiang C, Wonka P, *et al.* Checkerboard patterns with black rectangles[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2019, 38(6): Article No.171
- [29] Dellinger F, Li X Y, Wang H. Discrete orthogonal structures[J]. *Computers & Graphics*, 2023, 114: 126-137
- [30] Schling E, Kilian M, Wang H, *et al.* Design and construction of curved support structures with repetitive parameters[C] // *Proceedings of the Advances in Architectural Geometry*. Berlin: Klein Publishing Ltd., 2018: 140-165
- [31] Jiang C G, Wang C, Schling E, *et al.* Computational design and optimization of quad meshes based on diagonal meshes[C] // *Proceedings of the Advances in Architectural Geometry*. Paris: Presses des Ponts, 2021: 38-60
- [32] Wang H, Pottmann H. Characteristic parameterizations of surfaces with a constant ratio of principal curvatures[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2022, 93: Article No.102074
- [33] Schling E. Repetitive structures: design and construction of curved support structures with repetitive parameters[D]. München: Technische Universität München, 2018
- [34] Cai Ye. Study on spline modeling and discretization in architectural geometry[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2012(in Chinese)
(蔡焯. 建筑几何中的样条造型与离散技术研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2012)
- [35] Zhang Lei. The division method and optimization strategy of curved surface mesh in architectural design[D]. Xi'an: Xi'an University of Architecture and Technology, 2022(in Chinese)
(张雷. 建筑设计中曲面网格的划分方式及优化策略[D]. 西安: 西安建筑科技大学, 2022)
- [36] Schling E, Wang H, Hoyer S, *et al.* Designing asymptotic geodesic hybrid gridshells[J]. *Computer-Aided Design*, 2022, 152: Article No.103378
- [37] Schling E, Wan Z S, Wang H, *et al.* Asymptotic geodesic hybrid timber gridshell[M] // *Dörfler K, Knippers J, Menges A, et al. Advances in Architectural Geometry 2023*. Berlin/Boston: De Gruyter, 2023: 97-110
- [38] Zhao Junli, Xin Shiqing, Liu Yongjin, *et al.* A survey on the computing of geodesic distances on meshes[J]. *Scientia Sinica Informationis*, 2015, 45(3): 313-335(in Chinese)
(赵俊莉, 辛士庆, 刘永进, 等. 网格模型上的离散测地线[J]. *中国科学: 信息科学*, 2015, 45(3): 313-335)
- [39] Voss A. Über diejenigen Flächen, auf denen zwei Scharen geodätischer Linien ein conjugirtes System bilden[J]. *Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse*, 1888, 18: 95-102
- [40] Miura K. Method of packaging and deployment of large membranes in space[C] // *Proceedings of the 31st Congress of the International Astronautical Federation*. Tokyo: International Astronautical Federation, 1980: 11-19
- [41] Kilian M, Nawratil G, Raffaelli M, *et al.* Interactive design of discrete Voss nets and simulation of their rigid foldings[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2024, 111: Article No.102346
- [42] Tellier X, Douthe C, Hauswirth L, *et al.* Caravel meshes: a new geometrical strategy to rationalize curved envelopes[J]. *Structures*, 2020, 28: 1210-1228
- [43] Montagne N, Douthe C, Tellier X, *et al.* Discrete Voss surfaces: designing geodesic gridshells with planar cladding panels[J]. *Automation in Construction*, 2022, 140: Article No.104200
- [44] Montagne N, Douthe C, Tellier X, *et al.* Voss surfaces: a design space for geodesic gridshells[C] // *Proceedings of the 7th International Conference on Spatial Structures*. Madrid: International Association for Shell and Spatial Structures, 2020: 1-11
- [45] Tachi T. Freeform rigid-foldable structure using bidirectionally flat-foldable planar quadrilateral mesh[C] // *Proceedings of the Advances in Architectural Geometry 2010*. Heidelberg: Springer, 2010: 87-102
- [46] Tang C C, Sun X, Gomes A, *et al.* Form-finding with polyhedral meshes made simple[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2014, 33(4): Article No.70
- [47] Luo Yongfeng, Han Qinghua, Li Haiwang. Stability of steel structures: the theory and implement[M]. Beijing: People's Transportation Press, 2010(in Chinese)
(罗永峰, 韩庆华, 李海旺. 建筑钢结构稳定理论与应用[M]. 北京: 人民交通出版社, 2010)