

面向设计与制造的建筑几何综述

王建磊^{1,2,3}, 于子峰^{1,2,3}, 王慧⁴, 蒋才桂^{1,2,3}*

¹⁾ (人机混合增强智能全国重点实验室 西安 710049)

²⁾ (视觉信息与应用国家工程研究中心 西安 710049)

³⁾ (西安交通大学人工智能与机器人研究所 西安 710049)

⁴⁾ (西安交通大学数学与统计学院 西安 710049)

(cgjiang@xjtu.edu.cn)

摘要: 建筑几何作为连接几何学与建筑制造的新兴研究领域,旨在解决建筑设计与制造过程中的几何问题,横跨建筑学、几何学、工程学与计算机科学等多个学科。文中系统地回顾建筑几何领域的研究进展,重点阐述了基于四边形网格的离散建模在建筑设计和制造过程中的显著优势,简要介绍了三角形、六边形等其他类型网格的相关研究;聚焦于离散曲面建模、建筑支撑结构及面向制造的设计方法等方面的最新研究成果;分析了现有研究在离散化建模和制造可行性方面的适用性和局限性;指出建筑几何的发展趋势在于加强几何建模与数字制造、智能制造的深度融合,推动建筑设计与制造流程的智能化进程,为该领域的后续研究提供参考。

关键词: 建筑几何; 四边形网格; 自由曲面建模; 几何优化

中图分类号: TP391.41 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2025-00152

A Survey of Architectural Geometry for Design and Fabrication

Wang Jianlei^{1,2,3}, Yu Zifeng^{1,2,3}, Wang Hui⁴, and Jiang Caigui^{1,2,3}*

¹⁾ (State Key Laboratory of Human-Machine Hybrid Augmented Intelligence, Xi'an 710049)

²⁾ (National Engineering Research Center for Visual Information and Applications, Xi'an 710049)

³⁾ (Institute of Artificial Intelligence and Robotics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

⁴⁾ (School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract: Architectural geometry, as an emerging interdisciplinary research field, aims to address geometric challenges encountered throughout architectural design and fabrication processes. It bridges multiple disciplines, including architecture, geometry, engineering, and computer science. This paper systematically reviews the research progress in the field of architectural geometry, with a particular focus on the significant advantages of quadrilateral mesh-based discrete modeling in architectural design and construction. It also briefly introduces relevant studies involving other mesh types such as triangular and hexagonal meshes. The discussion centers on recent advances in discrete surface modeling, structural support systems, and design methodologies oriented toward fabrication. Furthermore, the article analyzes the applicability and limitations of existing research in terms of discretization modeling and manufacturability. It highlights the developmental trend of architectural geometry towards a deeper integration of geometric modeling with digital construction and intelligent fabrication, aiming to promote the intelligent transformation of the architectural design and fabrication pipeline. This work offers a valuable reference for future research in the field.

收稿日期: 2025-05-14; 修回日期: 2025-09-26. 基金项目: 国家自然科学基金(62495092, 62088102). 王建磊(1999—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为计算机图形学、几何处理; 于子峰(1999—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为计算机图形学; 王慧(1990—), 女, 博士, 副教授, 博士生导师, CCF 会员, 主要研究方向为计算机图形学、计算机辅助设计、建筑几何; 蒋才桂(1985—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 高级会员, 论文通信作者, 主要研究方向为计算机图形学、几何处理、智能驾驶。

Key words: architectural geometry; quadrilateral mesh; freeform surface modeling; geometric optimization

随着三维建模与数字化制造技术的迅速发展,复杂三维形态的几何建模、优化设计和加工制造正逐步从理论探索迈向实际应用,该技术显著地推动了设计流程的自动化与智能化,在计算机图形学、计算机辅助设计和工程仿真等多个领域展现出巨大的应用潜力.在建筑设计领域,制造技术的进步使得当代建筑设计日益青睐于自由曲面结构,赋予了建筑形式前所未有的自由度,同时也为建筑设计带来了新的挑战.尽管现有的参数化设计工具,如 Grasshopper^[1]等为自由曲面的建模与优化提供了有效途径,但在实际施工过程中,仍需综合考量制造可行性、结构稳定性和制造成本等多方面因素.这些制造需求通常以几何约束的形式呈现,并通过反馈机制与数字设计过程相互作用,深刻地影响着建筑设计方案的确定.

为了协调自由曲面设计与实际制造之间的复杂关系,研究人员将数值优化技术和几何建模方法引入建筑设计过程,催生了建筑几何这一交叉研究方向^[2].建筑几何是一个跨学科的研究领域,旨在解决复杂自由形体建筑设计与实际制造之间的技术挑战,其融合计算几何、数值优化、结构力学和数字制造等多个学科的理论与方法,致力于在满足几何约束的条件下,实现复杂形态设计与制造可行性之间的平衡.

本文系统地回顾了建筑几何建模与优化的相关研究进展,聚焦于基于四边形网格结构的建筑几何方法,重点讨论如何通过离散微分几何、数值优化和拓扑结构优化等方法,在保证制造可行性的同时实现高质量的几何表征.尽管本文以四边形结构为主线,但在讨论建筑成本和建筑需求等相关内容时,亦会简要讨论建筑几何中的其他典型网格结构,如三角形网格和六边形网格.

本文从计算机图形学的视角出发,总结近十年来建筑几何的相关研究方向和方法,期望为后续研究提供参考.鉴于篇幅限制,本文仅简要介绍相关研究的实际应用和实现案例,如需了解早期工作和更多工程实践案例,详见 Pottmann 等^[3]的经典综述.

1 本文概述

在现代建筑中,为了应对自由曲面造型日益增长的设计需求,研究人员将几何约束和数值优

化方法引入设计流程,系统性地探索了建筑几何这一研究领域.相关研究集中在面板化设计策略、支撑结构优化、制造成本控制和建筑功能适应方面,每个方向都针对建筑实践中的具体问题提出了创新性的解决方案,有力地推动了建筑几何从理论研究向实际应用的转化.

在建筑施工过程中,复杂自由曲面的实现通常面临制造可行性和成本控制的双重挑战.为此,研究者提出将自由曲面离散化为规则面片的策略.这种离散化方法不仅简化加工与组装流程,还进一步降低了优化计算的复杂度.设计师通过将连续自由曲面划分为一系列小尺度面板单元,在保证施工效率的同时,实现了建筑美学与结构性能的协同优化.面板化设计涵盖面板几何类型的选取、排列方式的设计,以及对材料性能、加工工艺与成本约束的综合考量.目前,以玻璃幕墙为代表的现代建筑广泛采用面板化方式对建筑结构进行覆层.

四边形网格因其独特优势,在建筑曲面的离散化过程中得到了广泛应用,如图 1 所示,图像来源于 wikimedia.org,遵循 CC0 1.0 许可协议.与三角形网格相比,四边形网格在边平滑性控制、顶点分布和材料利用率等方面表现更优,尤其适用于对连续性和平整性要求较高的建筑幕墙设计.现代建筑设计中,自由曲面通常采用平面四边形网格(planar quad mesh, PQ-mesh)进行离散化,以满足制造的经济性和可行性需求.随着制造技术和加工工艺的持续发展,设计师开始探索更复杂的面板形态,如单曲面板和双曲面板.双曲面板能够更精确地逼近复杂曲面形态,但制造成本相对较高;而单曲面板则在形态表现和制造成本之间取得了更好的平衡.

除了离散面板化外,支撑结构亦是建筑几何



图 1 北京凤凰国际传媒中心采用四边形玻璃面板进行覆层

研究的重要方向. 为便于论述, 本文简要界定其分类: (1) 依据节点扭矩传递特性分为无扭支撑结构(torsion-free)与有扭支撑结构; (2) 依据体系对外部支撑的依赖性分为自支撑结构(self-supporting)与非自支撑结构. 与既有研究脉络保持一致, 本文并非按照互斥类别的方式展开综述, 而是关注无扭支撑结构和自支撑结构 2 条研究线索. 无扭支撑结构已在相关综述中有所论述^[3]; 自支撑结构指无需依赖额外支撑系统, 通过构件间力学耦合实现整体稳定性的结构体系, 典型的形式包括网壳(gridshell)、砌体(masonry)和互承框架(reciprocal frame, RF). 在之前对无扭问题研究的基础上, 本文进一步深化对自支撑体系的讨论.

为了适应实际建筑需求, 建筑几何研究日益关注成本控制、功能优化和美学设计之间的平衡. 例如, 通过聚类优化算法减少面板的种类, 以降低制造和施工成本; 对条带建筑遮阳性能进行定向优化, 以提升其环境适应性和功能性; 运用混合多边形面板, 在保障结构性能的同时增加建筑外立面的视觉表现力. 这些研究体现了建筑几何从理论探索向实践应用逐步融合的发展趋势.

本文围绕基于四边形网格的建筑几何设计方法, 系统地回顾相关研究成果和应用进展, 探讨其在复杂建筑形态中的应用潜力和发展方向. (1) 详细介绍平面面板化方法, 重点探讨 PQ-mesh 和离散主法曲率网的构建算法; (2) 阐述曲面面板的制造方法, 重点分析单曲面板和双曲面板在建筑设计中的几何特性与制造策略; (3) 探讨支撑结构的相关研究, 重点讨论无扭支撑结构和自支撑结构 2 个方面研究内容; (4) 对建筑几何的经济性与功能性设计的考量, 涵盖面向结构设计与制造的成本优化、功能适应、美学设计和机器人辅助制造等关键研究内容. 最后对全文内容进行总结, 并展望建筑几何的未来研究趋势, 旨在为读者提供全面深入的建筑几何研究综述.

尽管本文以四边形结构作为主要研究对象, 但在某些特定应用场景中, 如制造成本控制 and 美学形态设计方面, 仍不可避免地涉及三角形网格或六边形网格的相关研究. 为了确保综述内容的全面性和广泛性, 本文在相关部分适当地纳入对这些网格形式的讨论.

2 平面面板化设计

在现代建筑设计与制造过程中, 平面面板因

其具有制造简单、成本低廉、装配便捷等优势, 被广泛认为是自由曲面建筑覆层的最优方案. 与三角形或其他多边形相比, 四边形面板在节点数量、模数化排版加工、结构受力和曲面参数协调方面具有显著优势. 因此, 如何将连续的自由曲面离散化为由平面四边形面片构成的网格结构, 一直是建筑几何领域的重要研究内容^[4].

在自由曲面建筑实现过程中, PQ-mesh 在保证视觉连续性和结构可行性的同时, 有助于高效地实现模数化排版和标准化制造. 此外, 与三角形网格相比, PQ-mesh 能够有效地减少节点复杂度和杆件数量, 显著简化后续的构件连接和施工流程. 然而, 如何生成满足平面性、边界连续性与对齐性、网格正则性及近似矩形性等约束的 PQ-mesh, 仍然是一个具有挑战性的优化问题. 为了深入探讨 PQ-mesh 的研究进展, 本文将依次介绍其基本概念和构造方法, 并进一步讨论近似矩形面板的设计策略、PQ-mesh 的几何优化方法、棋盘格图案生成等关键技术. 此外, 作为另一类常见的平面网格形式, 平面六边形网格(planar hexagonal mesh, PH-mesh)在一定程度上展现出几何美感与构造潜力, 相关研究将在本节进行简要介绍, 以补充对平面网格构建策略的整体理解.

2.1 基本概念

在建筑与结构工程设计中, 尤其是与玻璃结构相关的工程制造中, PQ-mesh 通常被视为一种理想选择^[5], 其优势主要体现在设计阶段的顶点简洁性、制造施工阶段的高效性和可操作性. PQ-mesh, 尤其是近似于矩形面片的网格, 在建筑几何^[2]和离散微分几何^[6]的研究中具有重要地位. 为了获得理想的离散化 PQ-mesh, 首先考察其连续表征, 即共轭曲线网. 本文沿用 Pottmann 等^[3]对共轭曲线网的定义: 假设曲面的参数化表示为 $S(u, v)$, 则曲面上任意点处的切向量可以表示为偏导数的线性组合

$$\begin{cases} \mathbf{t}_1 = u_1 \mathbf{S}_u + v_1 \mathbf{S}_v \\ \mathbf{t}_2 = u_2 \mathbf{S}_u + v_2 \mathbf{S}_v \end{cases}$$

如果这 2 个向量的第二基本型 Π 为 0, 则这 2 个向量是共轭的, 即满足约束

$$\Pi(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = Lu_1v_1 + M(u_1v_2 + u_2v_1) + Nv_1v_2 = 0.$$

其中, 系数 $L = \mathbf{S}_{uu} \cdot \mathbf{n}$, $M = \mathbf{S}_{uv} \cdot \mathbf{n}$, $N = \mathbf{S}_{vv} \cdot \mathbf{n}$, \mathbf{n} 表示单位法向量场 $(\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v) / \|\mathbf{S}_u \times \mathbf{S}_v\|$. 据此, 共轭曲线网定义为: 若曲面上存在 2 族曲线形成的网, 并且在曲面任意点处 2 族曲线的切向彼此共轭, 则该

曲线网称为共轭曲线网。

尽管共轭曲线网已有明确的定义, 但其在 PQ-mesh 构建中的直接应用存在困难, 主要原因是共轭曲线难以有效地指导四边形网格边的生成; 尤其在有负曲率区域的曲面上, 直接计算共轭曲线网可能产生自共轭方向, 即给定与一组曲线相切的向量 t_1 , 计算得到的共轭方向 t_2 与 t_1 平行. 这会导致重网格化过程中产生内角极小的四边形单元, 显著地削弱网格的几何质量和数值稳定性。

为了解决上述局限性, 许多研究采用主曲率方向引导网格的构建. 主曲率方向不仅彼此正交, 而且互为共轭方向, 具备良好的几何特性; 尽管在脐点附近可能出现几何奇异性, 但在一般情形下, 基于主曲率方向构建的曲率网能够在曲面上自然生成结构合理、几何特性良好的 PQ-mesh. 这类以主曲率方向为引导的离散共轭网构造方法已经得到广泛研究, 成为建筑几何中 PQ-mesh 构建的重要方法。

2.2 近似矩形的面板

圆网的概念由 Martin 等^[7]首次提出, 指由四边形面片构成且每个面片的 4 个顶点共圆的网格结构, 如图 2 所示. 圆网不仅具有良好的几何约束性, 也在 PQ-mesh 生成方面有重要作用^[8]. 这类网格不仅要求四边形顶点共面, 还需要满足对角角度之和为 π 的约束条件, 即若四边形内角依次为 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 和 ω_4 , 则有 $\omega_1 + \omega_3 = \omega_2 + \omega_4 = \pi$. 当且仅当网格中的每个四边形面均满足以上条件时, 该网格构成一个圆网。

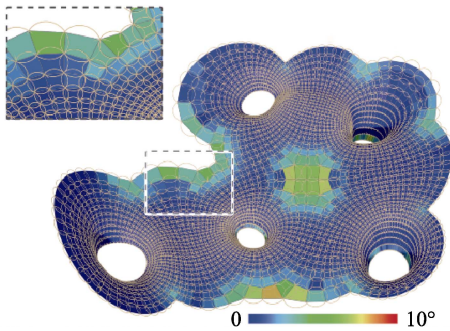


图 2 由圆网离散化表示的主法曲率网^[8]

锥网是由 Liu 等^[9]首次提出的一种特殊的 PQ-mesh 结构, 其定义为四边形网格的每个正则点 v_i 的所有邻接面均与同一圆锥面相切, 如图 3 所示. 这一特征的本质是顶点处存在一个公共圆锥, 使得该顶点的所有相邻面与该圆锥共享切锥性质. 锥网的判定可以依据内角平衡条件进行: 假设正则顶点

处的 4 个角依次为 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 和 ω_4 , 则锥网顶点满足对角线方向上的内角和相等, 即 $\omega_1 + \omega_3 = \omega_2 + \omega_4$. 这一角度平衡条件是锥网满足局部圆锥相切性的必要判据, 在离散微分几何中具有重要的价值^[6].

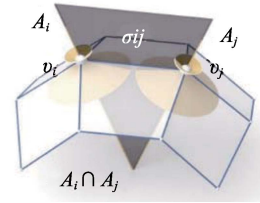


图 3 锥网结构^[9]

圆网和锥网在 PQ-mesh 生成方面具有重要的应用, 同时也与平行网格密切相关. 平行网格指一组具有相同拓扑连通性并且对应面保持平行的网格, 在建筑几何中被广泛应用. Pottmann 等^[10]基于平行网格构建一类具有无扭支撑特性的结构体系, 在提升施工可行性和结构稳定性的同时, 也为建筑造型提供了新的构建路径, 如图 4 所示. 圆网和锥网分别通过顶点偏移和面片偏移的方式构造平行网格, 以满足建筑几何设计的相关需求. 需要指出的是, 三角形网格通常难以实现平行网格, 只有在极少数特例中, 如球面三角形网格, 才可能构造相应的平行结构. 相比之下, PQ-mesh 则能够更好地构建恒定距离的平行网格, 这也是四边形网格在建筑几何中广泛应用的重要原因。

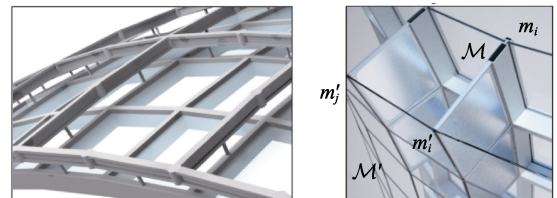


图 4 平行网格应用于多层建筑表面^[10]

2.3 PQ-mesh 计算设计

使用 PQ-mesh 近似自由曲面是建筑几何领域的重要研究方向. Liu 等^[9]首次提出一种利用锥网逼近自由曲面的 PQ-扰动算法, 其在保持表面光滑性的同时实现对原始曲面的高质量逼近; Zadavec 等^[11]则提出一种基于表示向量的共轭场优化算法, 用于生成符合建筑美学的 PQ-mesh, 但在脐点和奇异点区域, 该算法可能会失效; 进一步, Liu 等^[12]引入基于符号排列表示的共轭方向场设计方法, 有效地解决了奇异点区域的优化问题。

近年来, 研究人员越来越重视提升平面面板化设计的美学控制能力和交互性, 致力于为建筑

设计探索更具实用性的建模与编辑框架. Yang 等^[8]首次实现一个基于切空间和高维流形上的能量分析的通用框架, 用于 PQ-mesh 的高效设计探索; Deng 等^[13]则通过稀疏优化和子空间探索, 提出一种在满足几何约束条件下实现局部编辑的框架, 并引入增广拉格朗日法将复杂问题划分为可并行求解的子任务, 构建了一个支持交互式探索网格形状的优化系统, 显著地提升了设计效率与面板制造的可控性^[14]. 为了进一步支持平面网格的高效建模与编辑, Vaxman^[15]提出基于面片投影变换的建模框架以实现面片平面性约束, 该方法还能扩展到平面多边形网格上, 并且支持细分、多分辨率编辑与形状空间探索等应用.

随着人工智能(artificial intelligence, AI)技术的持续发展, 研究人员开始探索基于神经网络的 PQ-mesh 生成方法. Deng 等^[16]提出一种基于用户草图生成自由曲面 PQ-mesh 的建模系统 Sketch2PQ, 利用深度神经网络从单幅草图中实时推理出曲面几何和共轭方向场, 并通过几何优化生成与草图中特征线方向对齐的、满足结构制造要求的 PQ-mesh, 实现从概念草图到数字模型的高效转换, 显著地提升了自由曲面建模的灵活性和效率. 需要指出的是, 该方法目前仍然面临边界控制能力不足、多重遮挡处理有限、缺乏结构可行性等问题, 未来可进一步拓展其在复杂拓扑、结构约束集成及细节控制方面的能力, 推动 AI 在建筑几何设计中的深度应用.

2.4 棋盘格计算设计

近年来, 除了传统的 PQ-mesh 计算设计方法之外, 直接基于正交共轭网定义的离散主曲率网构造方法逐渐成为研究焦点.

Peng 等^[17]提出如图 5 所示棋盘格方法, 对初始四边形网格(黄色线条)进行中点细分, 通过连接每个面边的中点生成新的四边形网格, 其中, 深色四边形为平行四边形. 值得注意的是, 尽管 2 组初始控制网格形状不同, 但所生成对角线网格是全等的. 然后通过在对角网上引入对角线正交约束和白色面片的平面性约束, 使得其对角网构成一个正交共轭网. 棋盘格方法在处理四边形网格的几何优化方面表现出了显著的优势; 然而, 由于该方法要求网格中每隔一个面必须是平行四边形, 且在边界匹配方面较为复杂, 因此在一定程度上限制了其在实际应用中的灵活性. 为了克服上述局限性, Dellinger 等^[18]进一步提出基于中线正交约束的改进方法, 通过约束对角线等长使得控制网

构成正交共轭网, 有效地解决了棋盘格方法的局限性.

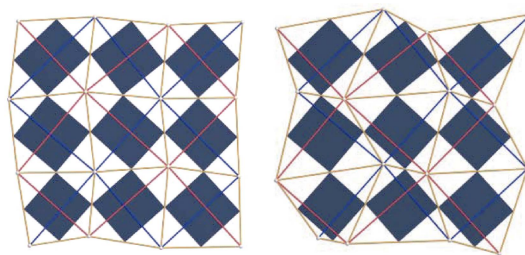


图 5 棋盘格方法^[17]示意图

棋盘格方法不仅在离散几何处理领域具有重要的应用价值, 还在建筑工程、艺术设计等多个跨学科领域中展现出了广泛的应用前景. 如图 6 所示, 在计算机图形学领域, 棋盘格方法在图案设计^[17]、曲面等距变形^[19]和网格参数化^[20]等方面表现出色. 在建筑结构设计领域, 棋盘格方法为折纸结构设计^[21]、剪纸结构设计^[22]、建筑表皮^[23]和支撑结构^[24]等提出了新的思路和解决方案. 此外, 在材料科学与工程力学等领域, 棋盘格方法也被应用于拉胀超材料几何构型设计^[25]和机械刚性形变分析^[26]等方面. 随着跨学科研究的深入, 棋盘格方法有望在更多领域为解决复杂的工程设计问题提供创新的思路和方法.

2.5 PH-mesh 计算设计

尽管 PQ-mesh 在建筑平面面板化设计中长期占据主导地位, 但是随着节点简洁性、曲面连续性和构件标准化等方面的要求不断提高, 研究人员开始探索新的设计范式, PH-mesh 因其独特的几何特性受到了广泛的关注. PH-mesh 的三度节点结构和精确的面偏移能力不仅能够降低施工复杂度和建筑成本, 还能够实现诸如极小曲面、常平均曲率(constant mean curvature, CMC)曲面等多种复杂曲面的建模, 在建筑结构和工程设计等多个领域展现出广泛的应用前景. 值得注意的是, 当 PH-mesh 中所有顶点的度为 3 时, 网格天然具有共形性质, 意味着相邻面在每个顶点处共面于一个圆锥面, 有助于构建可制造的曲面结构. 同时, 与传统的三角网格相比, PH-mesh 具备构造无扭支撑结构的潜力, 在力学性能优化和制造简化方面具有明显的优势.

PH-mesh 作为蜂窝结构的离散化形式, 在建筑和工程中常用于构建轻质的、高强度的面板系统. 这类结构不仅在力学性能方面表现优异, 还具备高度的模块化和空间填充能力, 进一步增强了其在可持续设计和参数化构造中的适用性.

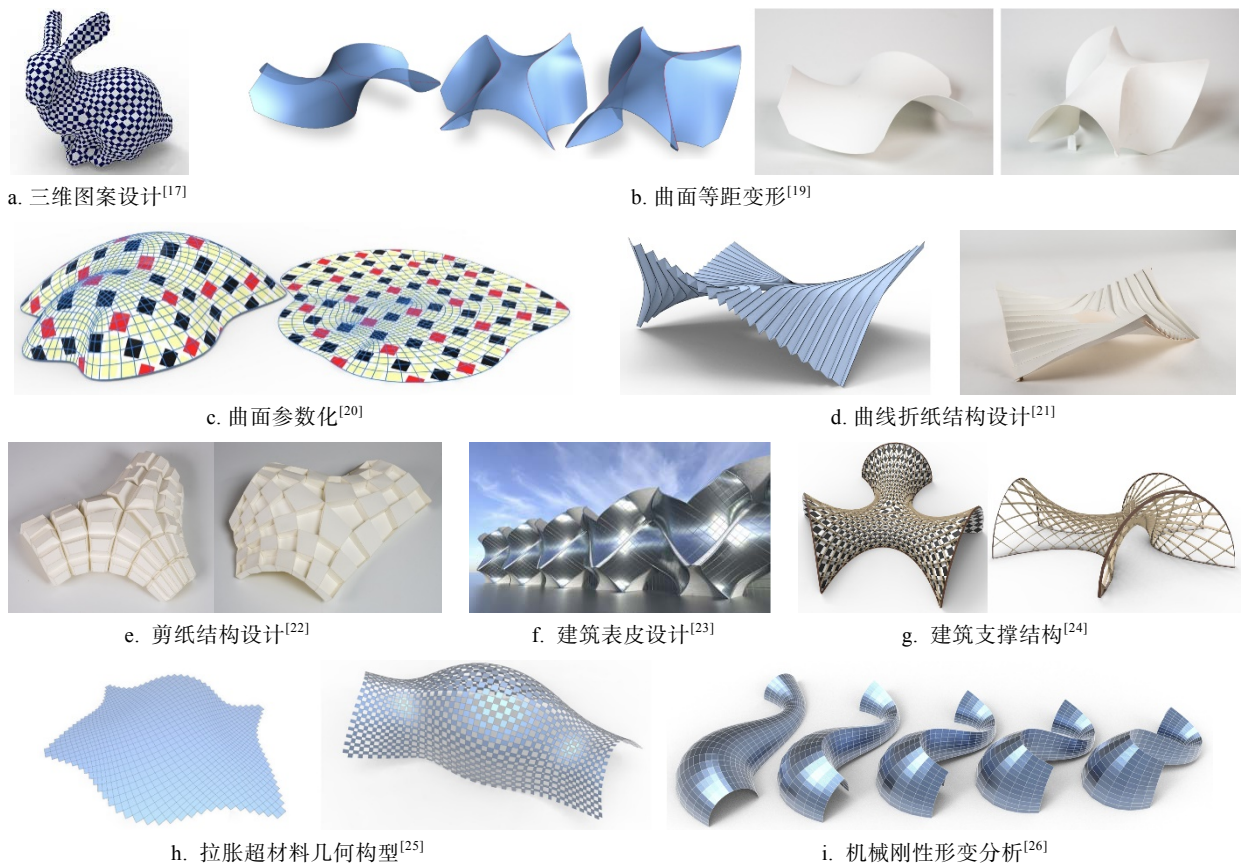


图 6 棋盘格方法在几何处理、建筑工程和艺术设计的应用场景

早期, 针对 PH-mesh 的研究存在一定局限性, 一些工作仅能处理简单的形状^[27], 还有一些工作未充分地考虑网格整体的平滑性和六边形的形状规则性^[28-29]. Wang 等^[30]通过构建三角形网格和 PH-mesh 之间的对应关系, 实现对六边形面片的精确控制, 并通过共轭网络提出一种直接生成 PH-mesh 的方法, 然而其在处理脐点区域时存在局限性, 仅适用于几何形态相对简单的曲面. Li 等^[31]提出一种基于离散三角剖分的框架, 能够自动生成具有三度节点和平面面片的六边形网格; 通过引入局部拓扑优化策略, 该方法可有效地解决脐点、抛物区域和偏移结构等难题, 实现了兼顾美观性与制造可行性的建筑面板化设计方案. Pluta 等^[32]则引入坐标场构建带有量化旋转的无缝全局参数化框架, 结合曲率对齐、共轭方向和尺度控制等约束, 成功地生成了具有良好形状质量和整体协调性的 PH-mesh. 这些研究显著地拓展了 PH-mesh 在复杂几何形态中的应用范围, 为建筑设计和工程实践提供了新的可能性.

针对自由曲面的面板化设计, 学术界已经开展了广泛研究, 在制造可行性、几何连续性、建筑美学控制等方面提出了多种优化方法和交互式建模框架. 然而, 随着建筑几何形态的日益复杂化和

艺术表达需求的不断提高, 单一网格类型在设计多样性和制造灵活性方面的局限性日益凸显. 为了应对这一挑战, 研究人员开始探索基于混合多边形的自由曲面逼近方法, 旨在兼顾面板平面性、制造可行性和视觉表现力. 这些新兴的研究方法为解决当前面板化设计中的限制提供了潜在的解决方案, 相关工作将在第 6 节详细讨论.

2.6 实际建筑案例

现代自由曲面建筑广泛采用平面玻璃面板进行外立面覆层设计, 这种设计方法既能实现复杂的几何形态, 又能保证建筑的功能性和经济性. 平面玻璃面板覆层的趋势在全球范围的标志性建筑中得到了充分的体现. 如图 7 所示, 世界各地的许多现代建筑采用平面多边形面板进行曲面建筑覆层. 图 7a 所示为 Foster 建筑团队设计的 Sage Gateshead, 其巧妙地运用平面四边形玻璃面板完美地贴合了建筑的波浪形轮廓, 图片来自 flickr.com, 摄影师 Alex Liivet, 许可协议 CC0 1.0; 图 7b 所示为墨西哥 FR-EE 建筑事务所设计的 Museo Soumaya, 采用镜面抛光的六边形铝板进行覆层, 赋予了建筑光滑流畅的外观, 图片来自 wikimedia.org, 摄影师 Own work, 许可协议 CC BY-SA 3.0.



图 7 现代建筑广泛采用面板方式进行覆层

3 弯曲面板化设计

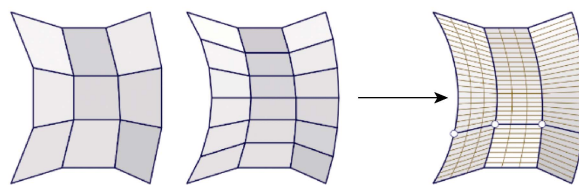
除了平面面板化技术外,随着玻璃面板热弯和冷弯技术的快速发展,曲面面板已经成为复杂曲面构型的重要实现途径,并在当代建筑设计中占据日益重要的位置.与平面面板相比,曲面面板能够更精确地还原设计意图,提供更丰富的建筑表现力.然而,双曲面板的制造和安装过程相对复杂和昂贵,单曲面板则在制造复杂度和曲面逼近精度之间取得很好的平衡.本节将系统探讨单曲面板和双曲面板相关研究的最新进展和方法.

3.1 单曲面板设计

单曲面又称可展曲面,是一类在局部区域内可以无失真地展开至平面的曲面,其显著特征是可以简单弯曲平面材料实现,因此在建筑覆层结构设计中具有广泛的应用.从微分几何角度,单曲面通常表示为沿直母线方向具有一致切平面的直纹面,在任意点处的高斯曲率恒为 0.近年来,可展曲面相关研究呈现多元化发展趋势,涉及诸如三维模型的可展逼近等多个方向,本节重点探讨与建筑几何密切相关的单曲面板设计,这类面板在展开状态下往往呈现出规则边界,便于制造和施工过程的优化.对于可展曲面的深入理论研究和实际应用发展,可参考文献[33].

在单曲面板的设计研究中,早期学者曾提出通过将单曲面转化为对偶空间中的一条曲线,将复杂的几何约束问题简化为对该曲线的约束.由于对偶空间中平面被表示为点,可展曲面变成了一条连续曲线,因此原始的非线性几何问题可以

转换为具有凸结构的优化问题,为单曲面的高效近似优化提供了可靠的数值方法^[34-35].此外,还有的研究通过 $n \times 1$ 的张量积 B 样条曲面,结合非线性约束确保曲面具有零高斯曲率^[36-37].之后,为了解决自由曲面建筑的单曲面板化问题,研究人员提出多种单曲面板设计方法.在已有平面四边形条带建模可展曲面的基础上,Liu 等^[9]提出一种结合几何优化与细分算法的建模方法,通过 PQ 扰动与网格细分交替应用,实现了面片高精度平面控制下的可展曲面建模.如图 8 所示,该方法适用于柱面、锥面、切可展曲面及三者混合的复杂曲面,尤其适用于建筑等对平面材料要求高的场景中.进一步,Pottmann 等^[38]阐明了共轭网(光滑模型),D-strip 模型(由可展条带组成的半离散模型)和 PQ-mesh(离散模型)之间的几何关联,并基于 D-strip 模型提出一个多目标优化框架,实现了可展性、边界平滑性与结构规整性的平衡.

图 8 通过将 PQ-mesh 沿一族曲线进行细分实现单曲面板设计^[9]

随着建筑设计趋向于复杂化,自由曲面覆层应用日益广泛,传统的严格可展性约束在一定程度上限制了设计的灵活性.为了兼顾自由曲面建筑的设计灵活性和单曲面板制造的可行性,研究

人员提出并广泛研究了多种近似可展优化策略。Gavriil 等^[39]通过调整 B 样条曲面的控制点,使得局部高斯像在球面上近似为曲线,从而在自由曲面上实现区域近似可展。Wang 等^[40]提出基于测地平行坐标系的离散化建模方法,通过引入角度约束和边长约束构建近似可展曲面,如图 9 所示,实现了由单曲面板覆层双曲建筑曲面的设计效果,突破了 Frank Gehry 等建筑师仅使用可展表面进行建筑设计的局限性。Verhoeven 等^[41]提出一种基于向量场的 PQ-strip 重建算法,在输入三角网格上构建与规线方向一致、同时具备可积性和散度自由特性的向量场,并通过积分得到与主曲率方向对齐的平面四边形条带;在此基础上,该算法能够在近平面区域自动识别平面多边形和奇点,实现将分段可展曲面转化为规线对齐、面片可平面化的结构,显著地提升了自由曲面覆层在设计灵活性和制造可行性方面的表现。Baharami 等^[42]提出一种基于曲率对齐交叉场引导的、制造友好的曲面划分方法,首先生成规整的面片布局,并通过全局形变优化确保直纹方向一致、展平变换双射性以及边界水密性;然后在每个面片内部采用三角条带严格控制可展性,从而在可控误差范围内,以少量直纹面片高保真地逼近自由曲面;与常见的自由曲面可展逼近算法^[43-48]相比,该方法分割的区域数量少且形状规则,更利于切割、折叠和拼接。

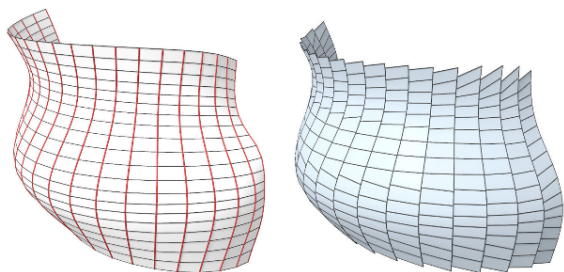


图 9 基于测地平行坐标系构建离散可展条带模型^[40]

为了进一步提升单曲面板设计的灵活性和实时反馈能力,近年来,研究人员已经提出多种交互式可展技术,旨在实现可展曲面的实时优化和灵活控制。Tang 等^[49]提出基于样条曲线和对偶法向量表示的方法,将复杂的非线性可展约束转换为二次优化问题,并采用改进的高斯-牛顿法实现实时求解,显著地提升了设计阶段的反馈效率和形态控制自由度;Inza 等^[50]通过加权四边形网格和接触元素定义离散可展性,结合细分流程实现了光滑曲面的连续建模,支持可展设计过程中的交互式编辑;Maekawa 等^[51]提出可展条带的交互式建

模方法,通过引入 Frenet 标架和 Darboux 标架之间的旋转角作为控制参数灵活地控制条带的形态,该方法结合 B 样条曲线作为中间路径,支持高精度、可交互的可展操作。

近年来,单曲面板设计在多个领域取得了显著进展,相关研究已广泛地应用于建筑几何、工业设计等多个场景。尽管成果丰富,但该领域仍存在一系列亟待解决的关键问题。当前,主流方法主要依赖于高斯曲率最小化来近似可展性,然而这一策略难以实现真正的可展性,在材料加工环节中可能引发拉伸、扭曲乃至误差积累等问题。此外,现有的优化算法通常计算复杂度较高,容易陷入局部最优,限制了其在大规模复杂曲面建模任务中的适用性;同时,现有的方法缺乏统一的建模与优化框架,系统集成难度大,且交互式建模工具在响应制造约束和用户意图方面仍显不足,难以支持设计流程中的实时反馈与决策控制。

针对上述挑战,未来研究可在以下方面展开深入探索:(1) 研究满足严格几何可展性条件的建模与优化算法,增强其在实际工程制造中的适用性与可靠性;(2) 引入多尺度协同优化机制,提升算法的稳定性与全局最优能力,降低陷入局部最优的风险;(3) 构建融合材料性能模拟与制造过程反馈的闭环设计系统,有助于实现从数字模型到实体制造的高度一致性;(4) 结合 AI 与人机交互技术开发具备实时响应与可展性引导功能的智能建模平台,进一步提升设计效率与创新能力。通过上述方向的持续推进,从而在理论研究与工程实践之间架起桥梁,推动复杂曲面可展化设计在建筑几何等领域实现更高水平的发展。

3.2 双曲面板设计

在现代建筑设计中,通过双曲面板实现大型平滑双曲外表面面临着重大挑战。在面板制造过程中,可以通过简单的切割工艺获得平面面板,单曲面板则可以利用材料的弹性特性进行成型。然而,双曲面板的制造需要定制专用模具,直接导致其制造过程的复杂性显著提高。当自由曲面被划分为多个不同的双曲面板时,所需模具数量的增加使得生产成本显著增加。为此,研究人员一直在积极探索创新的双曲面板设计方案,在保证几何精度和美学效果的同时提高制造效率,降低生产成本。

在双曲面板建模的早期研究中,研究人员采用光滑连接的可展条带近似负高斯曲率曲面,实现了整体曲面的连续性和光滑性^[52-53];该建模策略可视为半离散渐近参数化的一种计算实现,其

数学理论框架已经被系统性地研究^[54]。基于上述理论框架, Käferböck 等^[55]提出一种基于双线性曲面片和渐近网(A-Net)的离散仿射极小曲面构造方法, 实现了曲面片拼接处的切平面连续性; 但由于其对网格结构和奇异点控制有较高要求, 该方法在复杂自由曲面建模中受限。Huhnen-Venedey 等^[56-57]基于 Plücker 线几何框架, 提出一种将渐近网扩展为由超双曲面片组成的片段光滑曲面的方法, 通过构造可控自由度的超双曲面片实现相邻曲面片的切平面连续性, 为建筑几何中自由曲面的离散化设计提供了新的思路, 并进一步扩展至 Weingarten 变换的相关研究。Shi 等^[58]提出一种基于渐近网和有理双线性曲面片的构造方法, 能够生成由光滑拼接的超曲面网组成的自由曲面, 有效地近似负高斯曲率曲面; 并引入 Darboux 变换, 将该方法扩展至更广泛的曲面类型。

Tellier 等^[59]则将研究重心聚焦于 CMC 曲面, 提出基于高斯映射和平行变换的 S-CMC 网格生成方法, 其不仅能够较好地逼近原始曲面, 还具有良好的平面性、无扭节点、可偏移性等适用于建筑结构设计的特性, 进一步拓展了离散曲面设计在实际工程中的应用边界; 然而该方法在局部几何调整的灵活性方面有局限性。Wang 等^[40]提出测地平行坐标系的离散化定义与构造方法, 能够在等距变换下从旋转面生成自由形态曲面, 得到的曲面由内蕴等价的旋转条带组成, 可推广用于离散可展曲面的建模; 在建筑覆层应用中, 该方法仅需要一个旋转面模具即可批量制造双曲面板, 显著地降低了制造成本。

基于对上述特定类型曲面的深入研究, 研究人员进一步将研究范围扩展至更一般形式的 Weingarten 曲面。Weingarten 曲面指在曲面任意点处的 2 个主曲率 k_1 和 k_2 满足某种代数关系的曲面, 涵盖了 CMC 曲面 ($H = (k_1 + k_2)/2 = C$)、极小曲面 ($H = 0$)、常高斯曲率曲面 ($K = k_1 \cdot k_2 = C$)、可展曲面 ($K = 0$) 等多种曲面类型。Pellis 等^[23,60]首次提出主曲率对称网(S-net)的离散化定义, 并在此基础上借助 Möbius 几何与 Laguerre 几何中的不变量扩展了其几何理论; 此外还提出线性 Weingarten 曲面的离散构造方法, 实现了对曲面面片的等价类划分。对于包含 N 个双曲面片的线性 Weingarten 曲面, 该方法仅需不超过 \sqrt{N} 个模具。Jiang 等^[19]利用曲面等距变换中内蕴不变量的几何特性, 给出无穷小等距向量域的离散化构造, 实现了更高

精度的曲面形状探索和曲面配准算法。对于任意给定自由曲面, 基于高斯曲率 K 进行聚类分析, 得到 3 种面片等价类: 球面 ($K > 0$)、可展面 ($K = 0$) 和伪球面 ($K < 0$)。对于需要 N 个面板的自由表面, 所需模具数量不超过 $10\%N$ 。图 10 所示建筑曲面由少量球面模具(红色)和伪球面模具(蓝色)冲压成型的面板和单曲面板(白色)所覆层。该技术进一步降低了双曲面片的制造和加工成本, 展现出强大的理论价值和工程应用前景。

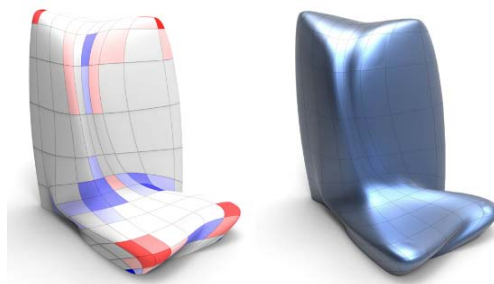


图 10 由双曲面板和平面面板组成的建筑外表面^[19]

在制造系统方面, Rist 等^[61]提出基于软性硅胶模的可变边界模具系统, 结合 Weingarten 曲面的几何初始化和仿真反馈, 实现了复杂形态幕墙面板的高效低成本制造, 展现出良好的曲率适应性和制造鲁棒性。

随着数据驱动策略的发展, 自由曲面面板化设计开始逐步引入智能优化策略。Gavriil 等^[62]针对传统冷弯玻璃面板设计中存在的计算成本高、多稳定性预测困难, 以及可制造性反馈滞后等问题, 创新性地引入可微混合密度神经网络, 实现形变与应力状态的高效预测与优化控制, 显著地提高了设计效率和制造可行性。该研究成果展示了基于学习策略的智能优化算法在建筑曲面设计中的巨大应用潜力。

值得注意的是, 尽管数据驱动方法在提升冷弯玻璃面板设计效率和交互反馈方面取得了显著的进展, 但是仍然存在多稳定状态识别不充分、局部与全局优化脱节、制造过程复杂性建模不足等问题。现有的模型多以单面板为单位进行预测与优化, 难以处理面板间的结构耦合关系, 且对热应力、装配误差等多物理场因素考虑不足。未来, 可以考虑引入生成模型以扩展形态解空间, 利用图神经网络建模面板系统的整体耦合行为, 并结合多模态学习与主动学习策略实现智能化、可持续的优化设计流程, 推动冷弯玻璃从设计可行迈向设计最优。

3.3 实际建筑案例

随着数字化制造技术的不断进步, 单曲和双曲面在自由曲面建筑设计中的应用日益广泛, 为建筑师设计更加复杂和富有表现力的几何形态提供了可能性. 在全球范围内, 许多标志性建筑已经采用了这种曲面面板化设计方法. 图 7c 所示为单曲面板覆层的沃尔特迪士尼音乐厅, 由 Frank Gehry 建筑团队设计, 图片来自 wikimedia.org, 摄影师 Carol M.Highsmith, 许可协议 CC Public Domain Mark 1.0; 图 7d 所示为单曲玻璃覆层的斯特拉斯堡站, 由 Jean-Marie Duthilleul 建筑团队改造, 图片来自 wikimedia.org, 摄影师 Smiley.toerist,

许可协议 CC BY-SA 4.0; 图 7e 所示为双曲玻璃覆层的新加坡苹果零售店, 由诺曼·福斯特建筑团队设计, 图片来自 wikimedia.org, 摄影师 Ominae, 许可协议 CC BY-SA 4.0; 图 7f 所示为双曲玻璃面板覆层的洪格堡缆车站, 由 Zaha Hadid 建筑事务所设计, 图片来自 wikimedia.org, 摄影师 Hafelekar, 许可协议 CC BY-SA 3.0. 这些案例充分地展示了单曲和双曲面在现代建筑设计中的创新应用, 为建筑形态的多样化和个性化表达提供了新的可能性.

不同平面面板结构的构造策略、几何特性以及所对应的相关工作如表 1 所示.

表 1 面板化相关研究

面板结构	典型网格结构	几何构造策略	几何特性和制造优势	相关工作
平面四边形面板	PQ-mesh	共轭曲线网、棋盘格划分、方向场引导	与边界和支撑结构对齐良好, 无需弯曲面板, 制造便捷, 材料利用率较高, 可实现平行网格	文献[7-18]
平面六边形面板	PH-mesh	三角形网对偶转换、六边形坐标场、图案偏倚	顶点简洁性高, 可实现平行网格, 适合重复构造和美学图案表达, 例如蜂窝结构	文献[15,27-32]
单曲面板	可展曲面网格	可展条带近似, 样条曲面逼近, 四边形网格细分	在制造复杂度和曲面逼近精度间实现了良好的平衡, 通过材料可变形特性弯曲实现, 无需模具	文献[9,34-42,49-51]
双曲面板	双曲曲面网格	渐近网和双线性曲面片构造, Weingarten 曲面设计	曲面拟合精度高, 可实现复杂自由形体制造, 但通常需依赖定制模具	文献[19,23,40,52-62]

4 支撑结构设计

在现代建筑设计与工程实践中, 支撑结构通过承载和传递荷载, 不仅确保建筑的安全性和稳定性, 还深刻影响着建筑的美学表现和功能实现. 本文在如图 11 所示的 Pottmann 等^[3]关于无扭支撑结构的基础上, 进一步拓展相关研究范围, 重点探讨建筑自支撑结构的最新进展, 涵盖网壳结构、砌体结构和 RF 结构 3 种典型结构. 其中, 网壳结构通过柔性板材构建曲面薄壳体系, 兼顾优异的力学性能与独特的建筑造型; 砌体结构则依靠砌块之间的黏结和荷载传递实现整体的稳定性; RF 结构则通过构件之间的相互连接和支撑, 形成了既灵活又稳固的结构体系. 下面梳理当前无扭支撑结构和自支撑结构的研究进展及其在工程实践中的应用.

4.1 无扭支撑结构

在自由曲面建筑结构中, 节点的几何构造对整体结构的制造复杂度和性能表现具有重要的影响. 无扭支撑结构指节点处所有连接构件的中面

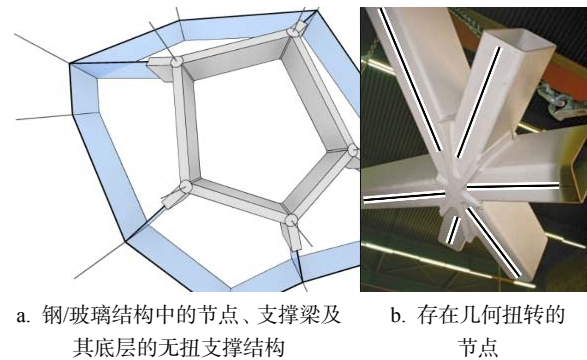


图 11 无扭支撑结构^[10]

共面并穿过一个统一的节点轴, 避免了空间扭转. 传统结构中的有扭节点在连接部位存在几何扭曲, 增加了构件加工与安装的复杂性, 也可能引发应力集中和节点不稳定等问题; 相比之下, 无扭节点不仅简化节点构造, 提升了制造标准化程度和施工效率, 同时也优化结构的受力路径, 使其更稳定可靠, 特别适用于多层、双层或自由曲面结构等复杂建筑系统. 因此在结构设计中实现无扭连接, 成为提升工程可建性的关键目标.

平行网格的构建对于无扭支撑结构的设计至关重要^[9]。Pottmann 等^[10]首次将平行网格理论应用于无扭支撑结构设计, 提出一种通过平行网格控制节点旋转特性的方法, 为后续针对复杂建筑中无扭支撑结构的设计与分析提供了重要的理论基础。

随着自由曲面形态建筑需求的日益增长, 研究人员开始重视在复杂曲面上高效地生成无扭支撑结构的方法。Schiftner 等^[63]提出一种基于三角网格内切圆排列的优化算法, 通过同步控制几何约束与曲面拟合误差, 生成具备高节点均衡性和制造友好性的无扭支撑结构; 随后, Jiang 等^[64]提出一种保持单元内壁夹角为 120° 的几何策略, 实现了具有节点一致性和结构重复性的蜂窝状无扭支撑结构, 有效地适配复杂形态自由曲面的建筑需求; Pottmann 等^[65]则结合 Voronoi 图和球体填充技术, 提出基于多面体单元的自由曲面划分方法, 进一步扩展无扭支撑结构在遮阳、采光及自承式建筑设计中的应用潜力。上述方法不仅提高结构与自由曲面之间的几何匹配度, 还在一定程度上兼顾了美学与功能性。

此外, 无扭支撑结构制造与施工的可行性也是重要的研究方向。Jiang 等^[66]提出基于四边形网格的无扭支撑建模方法, 通过引入平面支撑梁系统, 有效地提高了曲面建筑形体的制造简便性与结构稳定性。此类研究也体现了无扭支撑结构研究从几何理论研究向工程可实现性的深化发展趋势。

4.2 自支撑结构

除了无扭支撑结构之外, 建筑几何领域还致力于研究以整体几何协调性和受力连续性为主导特征的自支撑结构。此类结构通过优化形态使材料在受力路径上主要承受压缩或拉伸等轴向力, 确保在不依赖外部支撑或大规模加固的情况下实现自身稳定。下面重点介绍网壳、砌体和 RF 这 3 种自支撑结构。

4.2.1 网壳结构

凭借优异的结构性能和独特的美学特性, 由弯曲弹性元素组成的结构在建筑领域得到了广泛应用。近年来, 建筑几何领域已经开始探索利用弯曲面覆盖自由曲面的问题^[67], 例如, 第 3.1 节的单曲面相关研究。同时, 由直形板材通过弯曲加工形成建筑的方式也衍生出一种重要的结构, 即网壳结构^[68]。

网壳结构作为轻型空间结构的典型代表, 最早的实例可以追溯到 Shukhov 于 1896 年为俄罗斯博览会设计的圆顶结构。早期, 有关网壳结构的研

究局限于静态形式, 研究人员通过有限元分析获取应力场信息, 并以此指导重网格化算法设计, 实现网壳结构的优化^[69-70]; 同时, 相关制造约束的引入进一步提升了静态网壳结构的实际可行性^[71]。由于传统的静态网壳结构无法通过整体弯曲形成, 必须依靠逐步组装的方式进行制造, 因此在施工过程中通常需要定制化安装设备与支撑模板^[72], 制造成本和施工复杂度显著增加。

2013 年, Lienhard 等^[73]提出主动弯曲范式的概念, 将相关结构按设计理念划分为受力驱动型、几何驱动型以及二者的融合型, 该概念的提出使得利用弹性弯曲实现曲面形状的方法得到了广泛关注。弹性网壳作为主动弯曲结构的典型代表, 指由直态弹性梁组成规则四边形网格, 通过弯曲和扭转部署到目标曲面形态^[74], 显著地降低了制造成本和施工难度。尽管弹性网壳已经在实践中展现出诸多优势, 但其早期的设计方式仍以经验为主, 缺乏系统性的曲面生成和优化流程。近年来, 研究人员针对弹性网壳的构建方法开展了广泛的研究, 为弹性网壳结构的设计和实现提供了可行的方案。

Hernández 等^[75]提出一种基于非线性变分法的弹性网壳优化方法, 旨在降低成型过程中引入的初始弯曲应力; 随后, 他们进一步引入新的曲率能量项, 以更好地适应允许边长变化的不规则网格结构, 并将其应用于实际工程项目中, 验证了算法的工程实用性^[76]。

Panetta 等^[77]设计结合弹性杆件和旋转铰链的 X-shell 可展开结构, 实现了网壳结构从平面装配到三维部署的高效模拟与设计, X-shell 的实际可制造性也在后续研究中得以验证^[78], 然而该方法并不能确保网壳结构的二维平面性。

随着相关研究的深入, 研究人员开始通过特殊曲线网参数化探索网壳结构的构建。Wang 等^[40]提出一种离散测地平行坐标的方法, 将曲面离散化为以测地线为参数的四边形网格, 平直条带面沿着测地线以与曲面相切的方式放置, 实现静态网壳结构的设计与制造。Soriano 等^[79]通过动态松弛和多目标优化, 将离散测地网转换为满足板带长度和拼装间距约束的 G-shell 结构, 能够近似重现原测地路径, 并支持紧凑平面态和复杂曲面之间的快速可逆变换。

Pillwein 等^[80]提出一种无需迭代优化和物理仿真, 直接生成完全共面的二维可部署网壳的方法, 通过节点滑动缺口消除交点几何误差, 适用于由凸四边形单元构成的测地网; 后续的研究虽然

通过四边形单元拼接扩展至更复杂的自由曲面形态,但是对于存在复杂边界的曲面处理仍然存在挑战^[81-82];他们进一步提出广义可展弹性测地网壳,通过优化测地线能量网络实现复杂自由曲面的平面化部署,并在边界固定条件下弹性生成空间网壳结构^[83]. Backer 等^[84]则通过样条参数化与逆向几何平面化的策略,实现零残余应力的平面组装态和丰富的曲面拟合,扩展了网壳设计的边界.

Mesnil 等^[85]提出伪测地线网壳这一新型结构形式,统一了测地线与渐近线构造方法,能够在正高斯曲率曲面上用直梁构建网壳;并通过几何分

析和有限元模拟,发现适当地选择构件倾角可以显著地提升结构效率和稳定性,展示出良好的力学性能与工程应用前景. Wang 等^[86]则将平直条带面沿着伪测地线以与曲面呈等斜角的方式放置,通过水平集方法控制条带面与参考曲面的恒定倾斜角,能够生成测地线(0°)、伪测地线和渐近线网壳(90°),并进一步结合顶点和法线优化,自动生成具有无扭节点的多族条带面网壳结构,可以很好地应用于多种建筑结构和遮阳系统设计.

参数网分类和对应研究^[18,24,40,60,67,79-83,85-93]如表 2 所示.

表 2 特殊曲线网参数化的几何特性与网壳结构

曲面网参数化	光滑定义	几何性质	网壳应用特性	相关工作
等角网	2 族等参线成等角	曲面共形参数化	正交节点便于固定	[18,24,60,87-89]
测地网	2 族等参线均为测地线	密切面垂直于切平面,即平直条带沿测地线相切于曲面	易弯曲,节点便于固定,适用于任意弯曲曲面,贴合近似曲面,有遮挡作用	[40,67,79-83,86,90]
伪测地网	2 族等参线均为伪测地线	密切面于切平面呈常角,即平直条带沿伪测地线呈等角于曲面	易弯曲,适用于任意弯曲曲面,有遮挡作用	[85-86]
常主法曲率比网	2 族等参线共轭且关于主法曲率方向对称	密切面重合于切平面,即平直条带沿渐近线垂直于曲面	等角节点便于固定,弯曲刚性强,结构稳定,具有镂空效果	[87-88,90,92]
混合三角形网	多种曲线网混合定义,如混合测地渐近线等	上述特性混合	上述特性混合	[91-93]

在最小曲面上, Schling 等^[68,87]通过沿渐近曲线正交铺设可展平直条带,实现了渐近网壳结构的设计与制造; Jiang 等^[24]提出一种基于对角网和棋盘格细分的离散几何框架,可以构造满足 $k_1/k_2 = \text{const} < 0$ 的 Weingarten 曲面,适用于木结构和钢结构的渐近网壳设计;进一步, Wang 等^[88]将研究推广 $k_1/k_2 = \text{const} < 0$ 的 Weingarten 曲面,提出常主法曲率参数网,即参数网等角交叉并保持主曲率比恒定构造方法,同时还讨论了 PQ-mesh 的构造,并揭示成对 CRPC 曲面之间的力学对偶关系,为等角渐近网壳设计提供了新的几何-力学框架.

Wang 等^[89]提出一种基于中边细分相似平行四边形的新型构网方法,通过边比约束简化角度控制,实现了离散等角网(I-nets)及其扩展等角四重网(I-webs)的统一表达与优化集成,并通过共形映射、数值优化、运动传播等机制,实现高质量四边形网格在自由曲面建模中的构建与控制.





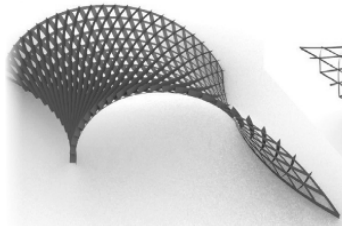
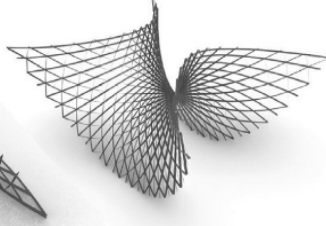
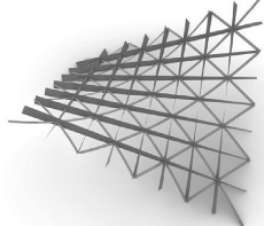
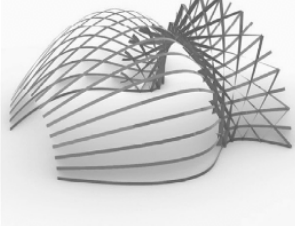
Pellis^[90]提出一种可对齐网壳的逆向设计管线,界定了 2 类可折叠且长度不变的网壳结构:测地可对齐网壳和常主法曲率可对齐网壳结构,以

及对应的设计方法,这 2 种方法无需大规模物理模拟即可快速设计,显著地降低了计算成本.

为了进一步提升四边形网壳结构整体的稳定性和受力均衡性,结构工程师通过对角线方向加入一族固定线形成三角网壳结构.受此应用需求的启发, Schling 等^[91]结合对测地线、伪测地线、渐近线等特殊曲线网的研究,提出一种离散化构造方法,实现了在曲面上生成混合测地网、伪测地网和渐近网的高精度三角形网壳条带,如表 3 所示;进一步,提出混合网壳结构的优化与组装流程,并制造了木制栅格结构以验证算法的实际可行性^[92]. Wang 等^[93]提出一种面向测地、混合三角网壳的设计流程,通过全局优化与等距变形交互式编辑,实现了对多种网壳结构的高效生成和实时形状控制.

Laccone 等^[94]通过对连续厚壳进行有限元应力分析构建正交应力方向场,生成半规则、方向场对齐的四边形网格,并引入高度可调的增强层构建双层网壳结构,结合施工约束节点和杆件布置进行后处理优化,实现兼顾结构力学性能和制造可行性的自由形态网壳设计.

表 3 由渐近线和测地线构成的混合网结构^[91]

3-webs		4-webs		partial webs
AGG	AAG	AGAG	AAG-G	
				
				

注: A 表示渐近线, 蓝色; G 表示测地线, 红色。

除了对简单网壳结构的设计外, Becker 等^[95]提出一种通用的 Kit-of-Parts 框架, 通过连续松弛将离散的构件分配转换为可微分优化, 结合全局松弛和局部微调的两阶段策略, 实现高效的零件复用和高保证的结构重构。

网壳结构在建筑设计领域的发展历史已逾百年, 诞生了诸多具有代表性的经典案例。传统的网壳设计大多依赖工程师的经验, 难以形成系统化的设计流程, 在处理复杂形态和施工可控性等方面存在明显的局限性。近年来, 网壳结构的计算设计研究取得了显著的进展, 在拓展设计自由度、提升结构稳定性和改善施工可行性方面取得了重要突破, 有力地推动了复杂曲面网壳结构的高精度制造和实际应用。

然而, 网壳结构的设计与建模过程中仍然存在一系列尚未解决的核心问题, 亟需深入研究。本文认为, 未来的研究可以从 3 个方面开展:

(1) 无挠结构系统构造方法仍然需要深入探索, 特别是如何实现具有无挠特性的四边形网壳结构, 核心是四边网初始化阶段的几何约束建模与数值求解策略。当前, 构建无挠四边形网壳结构的方法仍然缺乏统一且高效的理论框架和算法支持。

(2) 将支撑结构从传统的平直可展条带面推广至圆弧可展条带面, 是提升结构性能与美学潜力的重要途径。将具有恒定弧半径的圆弧条带以垂直、相切或等角等方式沿曲面有序铺设, 仍然是几何与工程实践中的一大挑战。文献[60]的研究表明, 恒定法向曲率网(CNC nets)在垂直铺设模式下具有可行性, 并通过物理建模验证了其构造方法; 后续的研究^[90]进一步拓展了 CNC nets 的几何理论

基础。然而, 相切与等角方式的实现高度依赖于对曲面局部几何性质的精准刻画与创新的铺设策略, 目前尚未被深入研究。

(3) 混合三角网壳结构的初始构型生成也是当前研究的热点与难点问题。特别是在具备特定几何性质的三角网构型精确初始化方面, 现有的方法尚难以兼顾理论通用性与工程适应性。值得注意的是, Yorov 等^[96]的研究表明, 基于各向同性几何的初始化方法可以求解难以直接处理的欧几里得结构优化问题, 该方法首先在各向同性几何中建立结构草图, 然后将其作为优化初值, 有效地解决了如 CNC 网格初始化与等角网格设计等难题, 展现出在结构设计中新的数学潜力。

综上所述, 上述方法不仅揭示当前网壳结构设计理论中的关键挑战, 也表明了高等几何方法在复杂结构建模与优化中的广阔前景。未来, 结合几何理论与工程实践的跨学科研究, 有望推动该领域迈向更加系统化和高效化的发展阶段。

4.2.2 砌体结构

凭借优异的结构性能、材料易得性和建筑经济性, 砌体结构在建筑制造领域得到了广泛的应用。砌体结构的稳定性源于刚性砌块单元通过砂浆粘结或干砌咬合形成的应力传递机制, 严格遵循静力平衡原理, 体现出几何形态和力学性能的强耦合特征。然而, 传统的砌体设计主要依赖于经验和二维静力学分析, 在应对复杂曲面造型需求方面存在局限性。近年来, 相关研究逐步引入数值优化算法, 旨在拓展砌体结构的设计自由度, 实现更加复杂的曲面建筑形态。

Whiting 等^[97]将结构可行性约束引入程序化建

模流程, 结合逆向静力学分析与非线性优化方法, 实现了符合静力平衡需求的稳定砌体模型; 进一步, 提出将静力分析与几何优化相结合的三维砌体结构设计方法, 不仅有效地减少非轴向力, 还支持体积最小化、平面性等多重设计约束, 实现了高效灵活的建筑形态设计^[98].

Panozzo 等^[99]提出将任意高度场转化为自支撑砌体结构的算法, 基于桁架网分析构建力流网并进行场对齐四边形重构, 通过启发式规则处理边界和曲率特征, 实现了高效的静力平衡布局. 如图 12 所示, Deuss 等^[100]提出用链条代替传统模板的方法, 通过静力分析和稀疏优化识别出能够自支撑的近拱形区域; 然后在预设锚点挂设链条, 大幅度减少临时支撑用量, 显著地降低了施工成本.



图 12 自支撑砌体结构^[100]

Miki 等^[101]将砌体拱顶抽象为参数化的 NURBS 贴片, 结合 Airy 应力函数求解压缩应力场, 模拟传统砌体肋拱的承载机理. 该方法通过设置贴片边界二面角和曲率范围, 实现自支撑曲面形态的灵活调节, 并可无缝地嵌入等几何分析流程.

近年来, 除了传统的基于应力传递的砌体结构外, 研究人员开始探索基于几何互锁实现稳定性的新型砌体结构. 这类结构不再完全依赖于砂浆或索件等附加连接, 而是通过砌体单元之间的几何约束和力学互锁提高整体结构稳定性和装配灵活性. 基于几何互锁的优化设计为自由曲面构建和复杂拓扑结构的搭建提供了新的可能, 成为砌体几何研究的重要方向.

Wang 等^[102]首次提出基于凸刚性块体和几何互锁机制的自由曲面装配方法, 如图 13 所示, 通过所提出的稳定性指标并采用梯度优化, 进一步提升整体结构在多方向载荷下的平衡能力, 增强了非自支撑曲面的结构稳定性; 在此基础上, Loing 等^[103]提出一种改进的移动截面互锁构造方法, 通过对 PQ-mesh 施加可以显式求解的行列式判据, 保证曲面结构的平移方向自锁性, 并首次支持非规则网格与自由边界曲面的设计; 之后, Wang 等^[104]提出 MOCCA 框架, 通过在关节的广义法向空间

采样构建运动锥, 利用运动-能量双对偶理论评估装配体静力平衡, 在运动空间优化关节所需要的运动锥并映射为参数化曲面, 实现了复杂装配体可装配性和稳定性的统一优化; Kao 等^[105]则提出耦合刚体块分析方法, 将运动学和静力学约束纳入优化框架, 用于复杂几何结构的稳定性评估.



图 13 基于几何互锁的砌体结构^[102]

针对传统砌体结构装配过程依赖脚手架、效率低下的问题, Wang 等^[106]提出一种面向砌体等刚性结构的强化学习装配框架, 采用由拆解反推的装配策略, 结合 GPU 加速稳定性模拟、课程学习机制和图神经网络, 实现多机器人在无脚手架条件下高效协同构建.

尽管拓扑互锁的砌体在自由曲面建筑领域展现出了显著潜力, 但是目前的研究仍然面临诸多挑战:

(1) 相关方法局限于相对光滑的规则曲面, 对于存在复杂拓扑、非均匀边界条件和多样化载荷的砌体结构适应性不足, 这种局限性导致在更一般的建筑场景下仍然缺乏系统性的理论支持. 未来, 需要进一步建立统一的几何-力学框架, 拓展自支撑几何的适用范围, 并在理论层面揭示结构稳定性与几何自由度之间的内在机制.

(2) 现有方法在几何优化与力学稳定性验证之间脱节, 难以在设计阶段提供严格的力学保障. 同时, 面向复杂装配流程的适配能力有限, 尤其在结合机器辅助制造与装配时, 现有框架难以充分地考虑机器人运动学约束与砌体几何-力学特性之间的耦合. 未来, 需要发展几何与力学一体化的统一模型, 并探索能够同时描述结构稳定性与装配可行性的数学与算法体系, 推动数字化设计与制造的深度融合.

4.2.3 RF

RF 以其独特的自支撑特性和几何美感, 在传统建筑中具有悠久的应用历史, 常见于桥梁、屋顶等结构形式. 近年来, 随着可持续建筑理念的推广、临时空间快速部署结构需求的增长, 以及计算

设计与 CAD 工具的普及, RF 结构作为一种模块化、可重复装配的结构体系, 在建筑设计领域重新引起了研究者的广泛关注。尤其是在自由曲面建筑等复杂环境下, 如何高效地组织并优化大量 RF 单元已经成为设计实践中的重要挑战。针对这一问题, 研究人员提出多种基于几何和制造约束的计算设计方法, 推动了 RF 的相关进展。

早期, RF 结构的设计多依赖于建筑设计师经验性操作或者仅进行简单的几何排列实现。针对自由曲面大规模 RF 结构的高效生成和优化, Song 等^[107]提出一种结合平面镶嵌和共形映射的交互式计算设计工具, 通过规则化拼接与几何优化, 确保杆件连接的精度和结构一致性, 支持参数化控制与实时可视化, 提升了自由曲面建筑中 RF 结构设计的灵活性, 如图 14 所示。

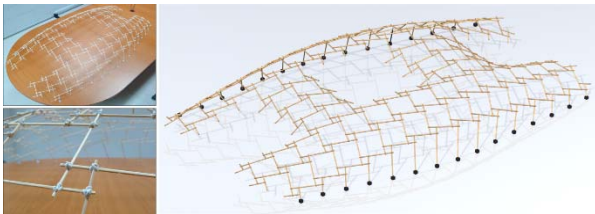


图 14 RF 结构实物和渲染结果图^[107]

Mellado 等^[108]提出针对无凹槽 RF 结构的交互式计算框架, 支持复杂曲面上 RF 结构的生成, 有效地避免了杆件交叉和悬浮现象; 此外, 该框架能够自动规划装配顺序和支撑策略, 有效地提升了制造过程的稳定性。Mesnil 等^[109]则提出基于线性代数的杆件平移优化方法, 将 RF 形态优化过程转换为二次优化问题, 能够同时控制偏心距和啮合

长度; 该方法计算稳定、实现简单, 能够保证面片的平面性, 适合于壳-互层混合结构的构建。

除了上述传统的自支撑结构外, 近年来, 研究人员开始探索更广义的自由曲面自支撑结构的设计。例如, 采用张拉-压缩混合壳体方法设计的静力平衡的自承壳体结构^[110], 理想化无厚度自支撑结构的几何参数化^[111-114], 结合拱形梁的自支撑结构^[115]等, 这些探索进一步丰富了复杂自支撑结构领域相关理论的研究。

尽管 RF 结构几何建模方法取得了显著进展, 但其在自由形态下的可行配置空间仍然未被充分探索。由于 RF 结构必须满足杆件之间的封闭支撑条件, 传统的平面铺展与回映射方法在处理高曲率或非规则边界曲面时常受限, 难以保证结构的闭合性与几何一致性, 因此未来可以致力于结合几何深度学习与优化策略, 构建更具泛化能力的形态生成框架, 实现对复杂空间边界和目标形态的结构可逆映射。另一方面, 当前对 RF 结构装配过程中的结构稳定性与变形控制研究仍然处于起步阶段, 特别是在大规模搭建任务中, 中间未完工状态常存在失稳风险, 影响结构整体可行性。虽然已有研究^[116]尝试引入装配顺序优化与分段构建策略, 但是, 如何在保证结构安全的同时自动推导最优装配序列仍然是一大挑战。未来, 可以引入 AI 驱动的动态规划模型, 在考虑施工误差与力学反馈的前提下, 实现对装配流程的智能化推理与实时调整。

4.3 实际建筑案例

支撑结构在建筑与制造中有着广泛的实际应用, 图 15 所示为多个建筑案例, 这些案例涵盖了



图 15 现代建筑中广泛应用的支撑结构

从轻盈的玻璃钢结构到复杂的木制自支撑结构, 不仅满足各种功能需求, 还为建筑增添了独特的美学价值. 图 15a 所示为 Foster 团队设计的华盛顿特区史密森国家肖像馆歌德庭院屋顶, 图片来自 wikimedia.org, 摄影师 Zack Frank, 许可协议 CC BY-SA 3.0; 图 15b 所示为诺曼福斯特建筑事务所重新设计的伊丽莎白二世大中庭, 图片来自 wikimedia.org, 摄影师 Diliff, 许可协议 CC BY-SA 3.0; 图 15c 所示为 SOM 建筑设计事务所设计的天津滨海站, 图片来自 wikimedia.org, 摄影师 Amazingloong, 许可协议 CC BY-SA 4.0; 图 15d 所示为 Schling 等^[9]设计的慕尼黑工业大学 INSIDE/OUT 展馆; 图 15e 所示为 Glen Howells 建筑团队设计的 Savill Building 的屋顶, 图片来自 wikimedia.org, 摄影师 Mike Pennington, 许可协议 CC BY-SA 2.0. 这些设计充分地体现了支撑结构, 尤其是自支撑结构在现代建筑中的多样化应用, 展示了自支撑结构在建筑创新和艺术表达方面的巨大潜力.

5 制造成本设计

建筑成本控制是建筑设计与施工中的核心议题, 对设计策略制定、构造系统选择和是否具备施工可行性具有重要影响. 随着数字化制造技术的快速发展, 自由曲面建筑因其独特的几何美学和空间塑造能力而备受关注; 然而, 这类复杂几何形态在施工过程中带来了显著的制造和组装挑战, 使得整体制造成本大幅增加.

针对自由曲面建筑的高成本问题, 学术界和业界已经采用多种应对策略, 如使用易加工的平面面板逼近自由曲面, 或通过平面构件弹性弯曲形成曲面. 在实际制造中, 构件的数量、类型和制造方式是影响整体施工成本的关键因素. 因此, 构件的批量化生成与标准化策略成为实现高效率、低成本制造的重要研究方向, 在建筑几何中被称为离散等价类优化. 通过将多样化建筑构件划分为有限类别, 使得不同的构件能够快速、批量地制造, 有效地降低模具制造和加工成本.

本节对离散等价类优化的基本原理、发展方向及其在建筑实践中的应用效果进行综述, 重点梳理近年来该方法在面板结构和桁架结构 2 个方向的研究进展, 如图 16 所示. 研究对象不仅包括四边形网格, 还涵盖三角形、六边形、混合多边形等多种网格类型, 以全面地分析离散等价类优化方法在不同网格结构中的应用潜力与挑战, 为建筑

几何中的成本控制问题提供启示.

5.1 面板结构

针对自由曲面离散化建模后面板种类过多的问题, Singh 等^[117]首次提出基于聚类与非线性优化将三角形网格面片简化为有限离散类别的方法, 显著地降低了离散化建模的制造成本; Fu 等^[118]提出 K -set 可拼贴曲面的方法, 通过形状相似性对四边形面板进行聚类, 然后构建边共享图, 将所有在曲面拼贴中共享的边进行分组, 在优化中统一施加边长一致性约束, 并采用非线性优化的方式, 在保持曲面近似性的同时使用少量种类的四边形面板逼近原始曲面; Eigensatz 等^[119]提出一种结合离散与连续优化的自由曲面分块方法, 将面板分为平面、柱面、抛物面、环面和三次曲面 5 类, 在六维度量空间中快速地预匹配面板与模具, 并用贪心策略选择最经济的模具, 在满足误差阈值的同时, 显著地减少了模具数量和制造开销; Jiang 等^[19]则基于离散无穷小等距向量场进行等距变形, 依据高斯曲率将面板分为球面、平面和伪球面 3 种类型, 减少了面板所需的模具数量, 显著地降低了双曲面板的制造成本.

Liu 等^[120]提出一种结合拓扑优化和顶点重定位的优化策略, 避免初始网格拓扑对于优化结果的影响, 同时支持通过预定义的模板逼近任意封闭曲面, 进一步降低了面板制造成本; Khan 等^[121]对 Liu 等^[120]的策略进行改进, 极大地提高了算法的收敛速度, 同时引入铰链连接件实现了具备自支撑能力的三维模型制造; 然而, 这 2 种算法在处理复杂开放边界时存在局限性. 为此, Wang 等^[122]提出一种方法, 首先通过曲线引导的区域采样与 CVT 相结合, 并辅以拓扑细化生成规则且分区可控的三角网; 然后对具有旋转与镜像不变特性的三角面聚类, 以及结合包含 RVD 贴近、边界和曲线约束的几何优化, 实现了在有限模板数下对自由曲面的高保真逼近, 同时有效地降低制造误差和装配成本.

Zhu 等^[123]提出一种标价场驱动的四边形建模方法, 通过交替优化标价场的可积性和光滑性, 能够使用少量模板四边形逼近目标形状, 与固定网格优化的方法相比, 该方法可以显著地减少模板数量, 提升制造效率与近似质量.

除了基于三角形面板或四边形面板的离散等价类优化外, 研究人员还用有限种类的混合多边形面板逼近自由曲面. Liu 等^[124]提出一种基于混合多边形的形状相似度定义, 并采用聚类-优化方法使得同一聚类多边形面片趋于全等, 实现了针对

混合多边形网格的离散等价类优化; 进一步, Chen 等^[125]将等价类优化扩展到砌体壳设计中, 提出一种面向三角形、四边形和混合多边形砌体壳结构的优化算法, 将砌体壳划分为离散等价类模板, 通过三层级聚类与几何优化实现了砌体壳的批量化制造方法。

5.2 桁架结构

在空间桁架结构领域, 离散等价类优化问题聚焦于节点和杆件的标准化. Koronaki 等^[126]提出基于节点聚类的优化方法, 通过识别并合并几何特征相近的节点, 减少空间桁架结构中节点类型的数量; Liu 等^[127]通过改进 *K-means* 聚类并施加局部几何约束, 使得同聚类节点趋于全等, 在保证整体形态和结构稳定性的前提下进一步减少节点种类。

Brütting 等^[128]通过优化杆件长度、截面和球节点的孔位, 同时实现杆件和球形节点的复用, 进一步降低了桁架结构的制造成本; Zimmer 等^[129]基于 Zometool 系统实现使用有限节点和边构件逼近任意拓扑曲面, 以及高质量的结构还原. Becker 等^[95]实现了网壳结构构件的批量化制造; Bi 等^[130]则通过聚类优化方法实现节点、杆件和面板的联合简化, 有效地减少了构件的种类, 较现有方法更具有实用性; Qiu 等^[131]利用球面对齐的形状度量 and 边长对网格的顶点和边进行分层聚类, 并在制造约束条件下结合局部簇合并与全局优化, 自动确定节点与杆件的模板化方案, 该方法在逼近输入几何并保持关键特征的同时, 以极少的等价类复用节点与杆件, 显著地降低了制造与装配成本。

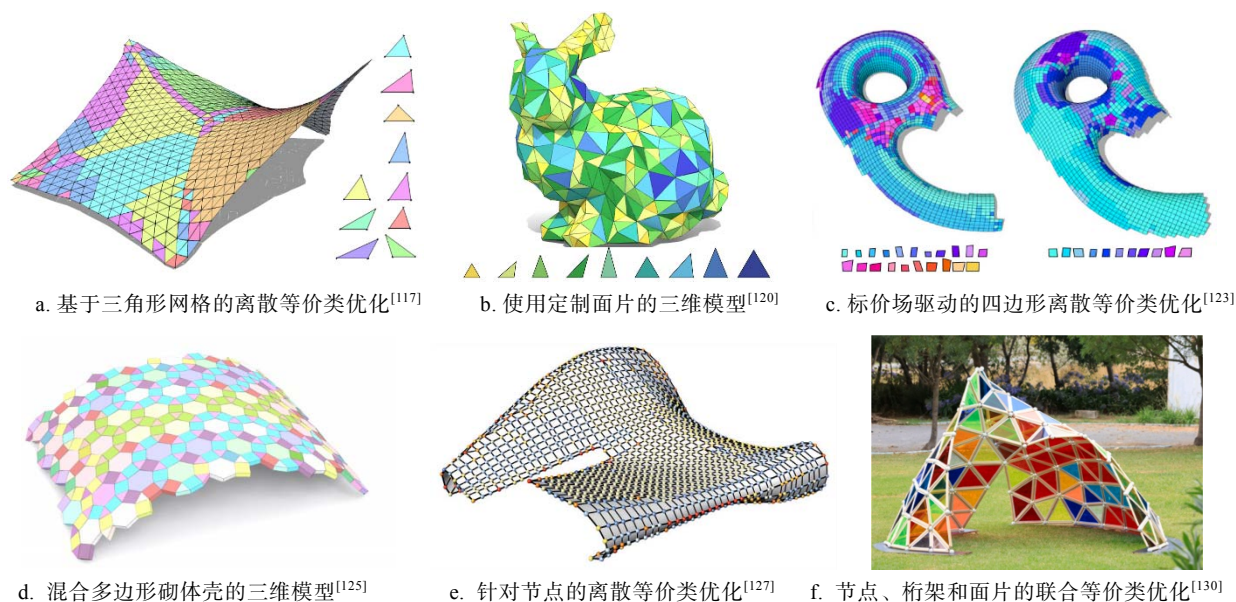


图 16 离散等价类优化在多种几何表示中的应用。

除了面板化设计、平面构件弯曲制造和标准化构件等降低制造成本的方式外, 还有很多工作为降低制造成本做出了努力, 如材料最小化设计^[132]、空间结构体积优化设计^[133]等, 本文不再详细列举。

尽管与建筑成本相关的优化算法在建筑构件标准化与制造成本控制方面已经取得了显著成果, 但在实际工程应用中仍面临诸多挑战, 有待进一步深入研究. 未来的工作可围绕以下关键问题展开:

(1) 现有的等价类优化方法在面板尺寸与形状的生成上高度依赖于初始输入模型和聚类优化算法的效果, 仅有少数研究尝试采用预定义面板集对输入网格进行逼近^[120,123]. 事实上, 尽管使用预定义模板可能带来一定的视觉误差, 但是这类

方法在减小面板数量与控制制造复杂性方面更契合实际建筑设计的需求. 因此, 如何在保证几何精度与建筑表达之间取得平衡, 开发更加高效、鲁棒的预定义模板优化算法, 将是未来的重要研究方向。

(2) 当前, 多数优化方法依赖复杂的非线性计算或多层次聚类策略, 计算开销较大, 限制了其在交互式设计场景中的应用能力, 尤其是难以支持对大规模自由曲面结构的实时处理. 未来, 可探索引入 AI 方法, 如将优化问题转化为推理过程, 构建基于学习的快速预测框架, 实现对大规模构件集合的实时优化与设计反馈。

(3) 尽管现有研究已经在构建标准化方面对建筑成本控制作出贡献, 但是诸如材料用量最小

化、空间结构优化等问题在降低建筑成本方面同样具有重要意义。未来,可以从更加多元的维度综合考虑建筑设计中的成本因素,推动相关优化算法向更广泛的实际工程需求靠拢。

6 制造需求设计

在建筑几何相关研究中,除了自由曲面离散逼近、支撑结构的设计与建筑成本的控制外,如何结合实际建筑的综合需求也是重要的研究方向。在确保建筑设计合理性与经济性的基础上,设计师还需要考虑建筑的功能性需求和美观性需求,这对于建筑的实际制造和视觉形象的呈现都具有重要作用。

这种综合考虑实际需求的趋势体现在多个方面,典型如建筑的遮阳与采光设计,这类系统不仅直接影响建筑内部环境舒适度,还与建筑的外观和结构紧密相关。然而,当前建筑几何领域的相关研究仍相对有限。Heinzelmann 等^[134]首次提出基于 Yoshimura 折纸参数化建模方法,其结合光照模拟和自适应结构设计,实现了长跨屋面的自然采光和遮阳功能设计;Wang 等^[135]提出离散线丛的统一框架,通过两阶段几何优化,在自由曲面上生成了具备可制造性的遮阳与反光支撑结构;最近,Wang 等^[86]提出一种切条带面图案的计算设计方法,能够以平直板材弯曲生成复杂的建筑结构,支撑网壳结构、遮阳系统等多种应用场景。

除了建筑与遮阳系统的设计需求外,建筑几何领域对于视觉艺术需求的探索也日益深化。目前,相关研究主要通过参数化和几何优化的方式进行建筑曲面的艺术设计。Song 等^[107]提出的 RF 结构交互式设计流程,支持蜂窝、棋盘、星形等图案的无缝设计,极大地丰富了 RF 结构的几何美学;Jiang 等^[136]通过引入仿射对称性正则项,首次实现了平面多边形图案在自由曲面上的嵌入,在保持面片平面性的同时保留局部对称性,确保了形变过程的平整性和规律性;Vaxman 等^[137-138]分别提出基于几何对称性优化和 Möbius 几何细分的网格生成方法,在提升建筑表皮美学性与结构合理性方面展现出独特优势;Peng 等^[139]提出一种在三维曲面上生成兼具美观性与结构可行性的三角形-四边形混合图案的方法,增强了建筑设计的灵活性;Peng 等^[17]提出的棋盘格方法在图案设计方面也展现出了良好的效果;Meekes 等^[140]提出基于高阶方向场和无缝函数,通过对偶方式生成周期性和非

周期性的非传统图案样式的曲面离散化方案。除了传统的图案设计外,Pellis 等^[141]针对鞍形区域视觉不连续性问题设计一种基于法向量变换的离散能量模型,衡量并优化网格的视觉平滑性;Inza 等^[142]提出一种通过对偶图精确地调控网格二面角,实现可控平滑度过渡的渐变设计的算法,其适用于建筑等对几何美感有较高要求的设计场景。

此外,针对特定设计材料或建筑结构的需求,以给定参考曲面为基础,通过逆向设计方法实现所需的结构,是实现建筑制造需求设计的另一个重要途径。在曲面结构设计的相关研究中,逆向设计方案已经得到了广泛应用。Konaković 等^[143]提出基于共形映射和非线性优化的交互式优化框架,通过在近乎不可拉伸的平面材料上裁剪规则三角形构成的连接图案,构造宏观负泊松比结构,使得单块平面材料在受力时可近似展开为复杂双曲面;Jiang 等^[25]通过将切割和折叠图案与曲面映射的主拉伸方向对齐自动生成剪纸图案,使得平面材料能够在拉伸条件下连续地变化成任意双稳态三维曲面;Jiang 等^[21-22]还通过逆向设计的方式实现了曲线折痕的折纸结构和盒装剪纸结构;Chen 等^[144]提出一种基于双稳态负泊松比六边形单元的可部署材料系统,通过对单元切口角度与厚度的有限元参数扫描,构建了性能可调的双稳态单元库,并基于共形映射将任意双曲面平面化,同时依据局部尺度因子选取最优单元,实现了从平面到三维曲面的自动部署,并通过数值模拟和激光切割原型验证了部署精度和承载性能;Panetta 等^[145]实现了一种面向基于表面薄膜充气件的逆向设计算法,通过引入度量拟合和正则化的表面展平算法,为目标双曲面生成可制造的平面通道网络初始布局,并在可微分的充气仿真闭环中,利用梯度优化持续调整通道边界,使得充气后结构在静力平衡下高精度地逼近目标曲面;Ren 等^[146]通过离线构件参数化单元的收缩-刚度映射数据库,基于曲率正则化的曲面展平算法均匀地生成可制造的焊接曲线网络,并结合全尺度充气模拟优化与原型实验,实现了高精度表面型充气结构。

针对特定需求的建筑几何相关研究是实现建筑设计实用性的重要途径。基于材料和结构分析的逆向设计算法中,通过构件需求、参数和形态之间的映射关系,不仅可以实现目标曲面设计、提高结构性能,还能在实际制造过程中实现需求驱动的精细控制。针对实际的建筑需求,继续深化材料、结构、形态设计协同优化的逆向设计算法研究,

也是建筑几何未来的重要研究方向。

随着数字制造与机器人技术的快速发展, 机器人制造也成为建筑几何领域实现设计到制造的重要研究内容。与主要依赖材料与结构性能的逆向设计方法不同, 机器人制造更强调通过自动化装备直接驱动复杂几何的制造过程, 不仅提升制造精度与效率, 也显著地拓展了形态生成的自由度。机器人制造在 3D 打印等领域已经开展了广泛的研究, 随着相关研究的不断深入, 其在建筑结构辅助设计与制造中也展现出了良好的应用前景。

在机器人制造与建筑设计的早期探索中, 研究人员提出了将几何建模、结构优化与机器人运动规划相结合的方法, 使六自由度机械臂能够稳定、高效地构建复杂杆件框架结构。FrameFab 系统^[147]通过几何分层和打印序列优化, 实现了结构稳定性与机器人运动可行性的兼顾; RoMA 系统^[148]则将增强现实建模与机器人线框打印结合, 使设计与制造能够同步迭代, 设计者在建模过程中即可获得即时物理反馈并进行增材操作, 有效地缩短了从概念到原型制造的周期。

随着建筑行业对智能制造需求的不断增加, 研究人员开始关注设计意图与制造过程的深度耦合, 推动了更为复杂与交互化的机器人制造模式。Choreo 框架^[149]通过自动化运动规划实现了非标准拓扑结构的高效热塑性材料挤出制造; Adroid 系统^[150]将工业机械臂与手持工具结合为可编程虚拟夹具, 借助力反馈与投影增强现实, 实现边做边定的交互式制造; Huang 等^[151]还提出协议化的自动化装配流程, 可将建筑设计与施工意图转化为机器人可执行计划, 并通过任务与运动联合规划完成复杂木构结构的高效制造验证。这些工作为快速原型设计与现场定制化制造提供了新的可能性。

除了制造过程本身外, 机器人辅助制造中的装配规划同样成为研究热点, 相关工作不断探索更智能化与高效化的计算框架, 优化装配顺序并提升整体制造性能。Wang 等^[116]提出基于时间一致性的拓扑优化方法, 通过在装配过程中引入约束有效地降低了中间状态的结构变形, 兼顾了精度与效率; 进一步, Wang 等^[106]提出基于强化学习的装配规划框架, 采用由拆解到装配的策略, 通过 GPU 加速模拟、课程式训练与图神经网络几何编码, 能够快速生成多种可行序列, 并支持多机器人协作和扰动适应, 为复杂建筑构件的高效、无脚手架制造提供了新的思路。

机器人制造在建筑几何设计与制造实践中的

研究已经从早期的几何建模与运动规划, 逐步转向设计意图与制造流程的深度耦合, 并进一步扩展到装配过程的智能优化与动态适应。尽管机器人辅助建筑制造取得了初步进展, 但其在多个关键方面仍面临挑战: (1) 单一机器人系统已经难以应对高复杂度的建筑设计与施工任务, 亟需发展多机器人系统中的动态调度与协同控制机制, 以实现制造过程的高并行性和更强的鲁棒性; (2) 在建筑构件的连接与装配方面, 仍需解决复杂构件连接方式与非线性插装路径的几何建模与规划问题。同时, 建立几何设计与装配工艺之间的协同优化机制, 有助于支撑结构形态的面向装配生成与演化, 推动机器人技术从被动执行转变为主动协作, 加速高复杂度与高定制化建筑的智能制造进程。随着 AI、增强现实与多机器人系统等技术的融合, 机器人制造在建筑领域的应用边界不断拓展, 为建筑设计理念与施工模式的转型提供了新的可能。机器人制造与 AI 辅助设计的深度整合, 有望实现从概念生成、结构优化到制造实施的全流程自动化与智能化, 该研究方向不仅具有现实可行性, 也将成为推动建筑学科与智能制造协同发展的关键前沿领域。

7 总结与展望

本文系统地回顾了近十年来建筑几何在离散曲面建模、支撑结构设计、制造成本控制, 以及功能与美学需求等领域的最新进展, 主要集中于四边形网格在几何表达、参数化建模与制造可行性之间的耦合优势; 深入探讨了面板化策略、结构体系建模与面向制造的几何优化方法。尽管建筑几何已经在多个研究方向取得了显著的进展, 但在面对多尺度设计需求与智能制造实践的背景下, 仍有一系列亟待解决的关键问题。

(1) 当前, 几何建模工具对复杂几何约束的统一表达与高效求解仍然不足。设计过程中的可展性、平面性、结构稳定性及制造可行性等约束往往需要分别建模、逐步集成, 缺乏统一的几何表达框架, 优化流程复杂、耦合程度较低。(2) 几何建模与多物理场仿真之间的联动性仍不紧密。在实际工程中, 建筑几何设计通常需要同时考虑结构力学性能、热环境适应性、光照与遮阳等需求, 而现有的研究多将仿真作为后验分析手段, 难以实现与几何建模过程的同步协同, 限制了以性能驱动设计的进一步发展。此外, 尽管近年来 AI 方法已逐

步引入几何建模过程,但相关研究多聚焦于几何特征学习与初步生成,尚未形成稳定、通用的智能建模体系;尤其在多边界控制、结构可行性反馈与复杂拓扑表达等方面,数据驱动方法仍然缺乏理论支撑与系统集成,难以适配真实设计场景中的高复杂性需求。(3) 现有的几何设计平台普遍缺乏对制造系统的实时响应机制,难以在建模过程中引入制造反馈,如模具数量限制、构件拼装方式、机器人轨迹可达性等要素,导致设计与制造存在较大割裂。综上所述,本文认为,未来建筑几何研究可聚焦 4 个方向:

(1) 面向建筑实践中多约束、多目标的快速建模需求,亟需构建支持用户意图表达、结构性能约束与制造规则反馈的实时交互系统。该系统应具备稳定的约束求解能力和多层次可视化反馈机制,支撑高效设计迭代与参数调控。

(2) 基于结构、热、光等多物理场的建筑性能分析,应与几何建模过程形成闭环反馈机制。通过统一的几何-物理参数空间及高效的耦合优化算法,可以实现性能导向的几何设计路径,提升设计合理性与建筑适应性。

(3) 几何建模应该更加关注从制造可行性出发的几何生成逻辑。结合模具复用率控制、冷/热弯约束、构件连接方式与机器人操作可达性等制造因素,建立几何构型与制造方式之间的映射关系,实现从制造反馈到几何生成的逆向闭环。

(4) 以图神经网络、生成模型和几何深度学习为基础,探索几何特征的表达、学习与泛化机制,构建具备形态识别、结构判别与制造可行性预测能力的智能设计系统,为建筑几何提供具备可拓展性与可解释性的建模支持。

建筑几何作为连接复杂几何设计与工程制造实践的关键桥梁,正面临由几何建模工具向智能化、多学科耦合系统发展的关键转型阶段。通过进一步整合几何表达、结构分析、制造反馈与 AI 等多元要素,建筑几何有望在提升设计效率、强化建筑性能与实现高复杂度制造方面发挥更加核心的作用。

参考文献(References):

- [1] Grasshopper[EB/OL]. [2025-05-14]. <http://www.grasshopper3d.com>
- [2] Pottmann H, Asperl A, Hofer M, *et al.* Architectural geometry[M]. Exton: Bentley Institute Press, 2007
- [3] Pottmann H, Eigensatz M, Vaxman A, *et al.* Architectural geometry[J]. Computers & Graphics, 2015, 47: 145-164
- [4] Cutler B, Whiting E. Constrained planar remeshing for architecture[C] //Proceedings of the Graphics Interface. New York: ACM Press, 2007: 11-18
- [5] Glymph J, Sheldon D, Ceccato C, *et al.* A parametric strategy for free-form glass structures using quadrilateral planar facets[J]. Automation in Construction, 2004, 13(2): 187-202
- [6] Bobenko A I, Suris Y B. Discrete differential geometry: integrable structure[M]. Providence: American Mathematical Society, 2008
- [7] Martin R R, De Pont J, Sharrock T J. Cyclide surfaces in computer aided design[M] //Gregory J A. The Mathematics of Surfaces. Oxford: Clarendon Press, 1986: 253-268
- [8] Yang Y L, Yang Y J, Pottmann H, *et al.* Shape space exploration of constrained meshes[J]. ACM Transactions on Graphics, 2011, 30(6): Article No.124
- [9] Liu Y, Pottmann H, Wallner J, *et al.* Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces[J]. ACM Transactions on Graphics, 2006, 25(3): 681-689
- [10] Pottmann H, Liu Y, Wallner J, *et al.* Geometry of multi-layer freeform structures for architecture[J]. ACM Transactions on Graphics, 2007, 26(3): Article No.65-es
- [11] Zadavec M, Schiffner A, Wallner J. Designing quad-dominant meshes with planar faces[J]. Computer Graphics Forum, 2010, 29(5): 1671-1679
- [12] Liu Y, Xu W W, Wang J, *et al.* General planar quadrilateral mesh design using conjugate direction field[J]. ACM Transactions on Graphics, 2011, 30(6): 1-10
- [13] Deng B L, Bouaziz S, Deuss M, *et al.* Exploring local modifications for constrained meshes[J]. Computer Graphics Forum, 2013, 32(2pt1): 11-20
- [14] Deng B L, Bouaziz S, Deuss M, *et al.* Interactive design exploration for constrained meshes[J]. Computer-Aided Design, 2015, 61: 13-23
- [15] Vaxman A. A projective framework for polyhedral mesh modelling[J]. Computer Graphics Forum, 2014, 33(8): 121-131
- [16] Deng Z, Liu Y, Pan H, *et al.* Sketch2PQ: freeform planar quadrilateral mesh design via a single sketch[J]. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 2023, 29(9): 3826-3839
- [17] Peng C H, Jiang C G, Wonka P, *et al.* Checkerboard patterns with black rectangles[J]. ACM Transactions on Graphics, 2019, 38(6): Article No.171
- [18] Dellinger F, Li X Y, Wang H. Discrete orthogonal structures[J]. Computers & Graphics, 2023, 114(C): 126-137
- [19] Jiang C G, Wang H, Ceballos Inza V, *et al.* Using isometries for computational design and fabrication[J]. ACM Transactions on Graphics, 2021, 40(4): Article No.42
- [20] Jiang C G, Wang C, Rist F, *et al.* Quad-mesh based isometric mappings and developable surfaces[J]. ACM Transactions on Graphics, 2020, 39(4): Article No.128
- [21] Jiang C G, Mundilova K, Rist F, *et al.* Curve-pleated structures[J]. ACM Transactions on Graphics, 2019, 38(6): Article No.169
- [22] Jiang C G, Rist F, Pottmann H, *et al.* Freeform quad-based kirigami[J]. ACM Transactions on Graphics, 2020, 39(6): Article No.209
- [23] Pellis D, Kilian M, Wang H, *et al.* Architectural freeform surfaces designed for cost-effective paneling through mold

- re-use[C] //Advances in Architectural Geometry. Champs-sur-Marne: Université Gustave Eiffel, 2020: 2-16
- [24] Jiang C G, Wang C, Schling E, *et al.* Computational design and optimization of quad meshes based on diagonal meshes[C] //Advances in Architectural Geometry. Champs-sur-Marne: Université Gustave Eiffel, 2020: 38-61
- [25] Jiang C G, Rist F, Wang H, *et al.* Shape-morphing mechanical metamaterials[J]. *Computer-Aided Design*, 2022, 143: Article No.103146
- [26] Jiang C G, Lyakhov D, Rist F, *et al.* Quad mesh mechanisms[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2024, 43(6): Article No.243
- [27] Wang W P, Liu Y. A note on planar hexagonal meshes[M] //Emiris I Z, Sottile F, Theobald T. *Nonlinear Computational Geometry*. New York: Springer, 2010: 221-233
- [28] Zimmer H, Campen M, Herkrath R, *et al.* Variational tangent plane intersection for planar polygonal meshing[M] //Hesselgren L, Sharma S, Wallner J, *et al.* *Advances in Architectural Geometry 2012*. Vienna: Springer, 2013: 319-332
- [29] Poranne R, Ovreiu E, Gotsman C. Interactive planarization and optimization of 3D meshes[J]. *Computer Graphics Forum*, 2013, 32(1): 152-163
- [30] Wang W P, Liu Y, Yan D M, *et al.* Hexagonal meshes with planar faces[R]. Hong Kong, China: The University of Hong Kong, 2008
- [31] Li Y F, Liu Y, Wang W P. Planar hexagonal meshing for architecture[J]. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2015, 21(1): 95-106
- [32] Pluta K, Edelstein M, Vaxman A, *et al.* PH-CPF: planar hexagonal meshing using coordinate power fields[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2021, 40(4): Article No.156
- [33] Yuan C, Cao N, Shi Y. Complex surface fabrication via developable surface approximation: a survey[J]. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2025, 31(10): 9284-9302
- [34] Bodduluri R M C, Ravani B. Design of developable surfaces using duality between plane and point geometries[J]. *Computer-Aided Design*, 1993, 25(10): 621-632
- [35] Pottmann H, Wallner J. Approximation algorithms for developable surfaces[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 1999, 16(6): 539-556
- [36] Chu C H, Séquin C H. Developable Bézier patches: properties and design[J]. *Computer-Aided Design*, 2002, 34(7): 511-527
- [37] Aumann G. Degree elevation and developable Bézier surfaces[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2004, 21(7): 661-670
- [38] Pottmann H, Schiffner A, Bo P B, *et al.* Freeform surfaces from single curved panels[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2008, 27(3): 1-10
- [39] Gavriil K, Schiffner A, Pottmann H. Optimizing B-spline surfaces for developability and paneling architectural freeform surfaces[J]. *Computer-Aided Design*, 2019, 111: 29-43
- [40] Wang H, Pellis D, Rist F, *et al.* Discrete geodesic parallel coordinates[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2019, 38(6): Article No.173
- [41] Verhoeven F, Vaxman A, Hoffmann T, *et al.* Dev2PQ: planar quadrilateral strip remeshing of developable surfaces[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2022, 41(3): Article No.29
- [42] Baharami H, Piovarei M, Tarini M, *et al.* Fabricable discretized ruled surfaces[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2025, 44(3): Article No.30
- [43] Binninger A, Verhoeven F, Herholz P, *et al.* Developable approximation via gauss image thinning[J]. *Computer Graphics Forum*, 2021, 40(5): 289-300
- [44] Zhao Z Y, Fang Q, Ouyang W Q, *et al.* Developability-driven piecewise approximations for triangular meshes[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2022, 41(4): Article No.43
- [45] Zhao Z Y, Li M, Zhang Z, *et al.* Evolutionary piecewise developable approximations[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2023, 42(4): Article No.120
- [46] Wu K, Zhao Z Y, Zhang Z, *et al.* Piecewise developable modeling via implicit neural deformation and feature-guided cutting[J]. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2024, 30(9): 5993-6004
- [47] He Y, Fang Q, Zhang Z, *et al.* Symmetric piecewise developable approximations[J]. *Computer Graphics Forum*, 2024, 43(7): Article No.e15242
- [48] Cheng Y Y, Fang Q, Liu L G, *et al.* Developable approximation via isomap on gauss image[J]. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2025, 31(10): 8310-8319
- [49] Tang C C, Bo P B, Wallner J, *et al.* Interactive design of developable surfaces[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2016, 35(2): Article No.12
- [50] Inza V C, Rist F, Wallner J, *et al.* Developable quad meshes and contact element nets[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2023, 42(6): Article No.183
- [51] Maekawa T, Scholz F. All you need is rotation: Construction of developable strips[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2024, 43(6): Article No.182
- [52] Flöry S, Pottmann H. Ruled surfaces for rationalization and design in architecture[M] //ACADIA. *ACADIA 2010: LIFE in: Formation*. New York: Association for Computer-Aided Design in Architecture, 2010: 103-109
- [53] Flöry S, Nagai Y, Isvoranu F, *et al.* Ruled free forms[M] //Hesselgren L, Sharma S, Wallner J, *et al.* *Advances in Architectural Geometry 2012*. Vienna: Springer, 2013: 57-66
- [54] Wallner J. On the semidiscrete differential geometry of A-surfaces and K-surfaces[J]. *Journal of Geometry*, 2012, 103(1): 161-176
- [55] Käferböck F, Pottmann H. Smooth surfaces from bilinear patches: discrete affine minimal surfaces[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2013, 30(5): 476-489
- [56] Huhnen-Venedey E, Rörig T. Discretization of asymptotic line parametrizations using hyperboloid surface patches[J]. *Geometriae Dedicata*, 2014, 168(1): 265-289
- [57] Huhnen-Venedey E, Schief W K. On Weingarten transformations of hyperbolic nets[J]. *International Mathematics Research Notices*, 2015, 2015(8): 2021-2081
- [58] Shi L, Wang J, Pottmann H. Smooth surfaces from rational bilinear patches[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2014, 31(1): 1-12
- [59] Tellier X, Hauswirth L, Douthe C, *et al.* Discrete CMC surfaces for doubly-curved building envelopes[M] //Hesselgren L, Kilian A, Malek S, *et al.* *AAG 2018. Advances in Architectural Geometry*. Gothenburg: Klein Publishing GmbH, 2018:

- 166-193
- [60] Pellis D, Wang H, Kilian M, *et al.* Principal symmetric meshes[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2020, 39(4): Article No.127
- [61] Rist F, Wang Z C, Pellis D, *et al.* A flexible mold for facade panel fabrication[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2024, 43(6): Article No.231
- [62] Gavriil K, Guseinov R, Pérez J, *et al.* Computational design of cold bent glass façades[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2020, 39(6): Article No.208
- [63] Schiftner A, Hübinger M, Wallner J, *et al.* Packing circles and spheres on surfaces[C] //Proceedings of the ACM SIGGRAPH Asia Papers. New York: ACM Press, 2009: Article No.139
- [64] Jiang C G, Wang J, Wallner J, *et al.* Freeform honeycomb structures[J]. *Computer Graphics Forum*, 2014, 33(5): 185-194
- [65] Pottmann H, Jiang C G, Hübinger M, *et al.* Cell packing structures[J]. *Computer-Aided Design*, 2015, 60: 70-83
- [66] Jiang C G, Wang C, Tellier X, *et al.* Planar panels and planar supporting beams in architectural structures[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2022, 42(2): Article No.19
- [67] Wang Hui. Construction of mesh and smooth surfaces in architectural geometry[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2020(in Chinese)
(王慧. 建筑几何中的网格与光滑曲面构造[D]. 大连: 大连理工大学, 2020)
- [68] Schling E. Repetitive structures: design and construction of curved support structures with repetitive parameters[D]. München: Technische Universität München, 2018
- [69] Pietroni N, Tonelli D, Puppo E, *et al.* Statics aware grid shells[J]. *Computer Graphics Forum*, 2015, 34(2): 627-641
- [70] Tonelli D, Pietroni N, Cignoni P, *et al.* Design and fabrication of grid-shells mockups[C] //Proceedings of the Conference on Smart Tools and Applications in Computer Graphics. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2016: 21-27
- [71] Mesnil R, Douthe C, Baverel O. Non-standard patterns for gridshell structures: fabrication and structural optimization[J]. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 2017, 58(4): 277-286
- [72] Quinn G, Gengnagel C. A review of elastic grid shells, their erection methods and the potential use of pneumatic formwork[J]. *WIT Transactions on the Built Environment*, 2014, 136(15): 129-143
- [73] Lienhard J, Alpermann H, Gengnagel C, *et al.* Active bending, a review on structures where bending is used as a self-formation process[J]. *International Journal of Space Structures*, 2013, 28(3-4): 187-196
- [74] Lienhard J. Bending-active structures: form-finding strategies using elastic deformation in static and kinetic systems and the structural potentials therein[D]. Stuttgart: Universität Stuttgart, 2014
- [75] Hernández E L, Sechelmann S, Rörig T, *et al.* Topology optimisation of regular and irregular elastic gridshells by means of a non-linear variational method[M] //Hesselgren L, Sharma S, Wallner J, *et al.* *Advances in Architectural Geometry 2012*. Vienna: Springer, 2013: 147-160
- [76] Hernández E L, Baverel O, Gengnagel C. On the design and construction of elastic gridshells with irregular meshes[J]. *International Journal of Space Structures*, 2013, 28(3-4): 161-174
- [77] Panetta J, Konaković-Luković M, Isvoranu F, *et al.* X-shells: a new class of deployable beam structures[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2019, 38(4): Article No.83
- [78] Isvoranu F, Panett J, Chen T, *et al.* X-shell pavilion: a deployable elastic rod structure[M] //Lázaro C, Bletzinger K U, Oñate E. *Proceedings of the IASS Annual Symposia 2019*. Barcelona: International Association for Shell and Spatial Structures (IASS), 2019: 1-8
- [79] Soriano E, Sastre R, Boixader D. G-shells: flat collapsible geodesic mechanisms for gridshells[M] //Lázaro C, Bletzinger K U, Oñate E. *Proceedings of the IASS Annual Symposium 2019*. Barcelona: International Association for Shell and Spatial Structures (IASS), 2019: 1-8
- [80] Pillwein S, Leimer K, Birsak M, *et al.* On elastic geodesic grids and their planar to spatial deployment[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2020, 39(4): Article No.125
- [81] Pillwein S, Kübert J, Rist F, *et al.* Design and fabrication of elastic geodesic grid structures[C] //Proceedings of the 5th Annual ACM Symposium on Computational Fabrication. New York: ACM Press, 2020: Article No.2
- [82] Pillwein S, Kübert J, Rist F, *et al.* Design and fabrication of multi-patch elastic geodesic grid structures[J]. *Computers & Graphics*, 2021, 98: 218-230
- [83] Pillwein S, Musialski P. Generalized deployable elastic geodesic grids[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2021, 40(6): Article No.271
- [84] Becker Q, Suzuki S, Ren Y Y, *et al.* C-shells: deployable gridshells with curved beams[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2023, 42(6): Article No.173
- [85] Mesnil R, Baverel O. Pseudo-geodesic gridshells[J]. *Engineering Structures*, 2023, 279: Article No.115558
- [86] Wang B L, Wang H, Schling E, *et al.* Rectifying strip patterns[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2023, 42(6): Article No.265
- [87] Schling E, Kilian M, Wang H, *et al.* Design and construction of curved support structures with repetitive parameters[M] //Advances in Architectural Geometry 2018. Gothenburg: Chalmers University of Technology, 2018: 140-165
- [88] Wang H, Pottmann H. Characteristic parameterizations of surfaces with a constant ratio of principal curvatures[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2022, 93: Article No.102074
- [89] Wang H, Li X Y, Li Z, *et al.* Discrete isogonal nets with similar parallelograms[J]. *Computer-Aided Design*, 2025, 189: 103937
- [90] Pellis D. Alignable lamella gridshells[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2024, 43(6): Article No.183
- [91] Schling E, Wang H, Hoyer S, *et al.* Designing asymptotic geodesic hybrid gridshells[J]. *Computer-Aided Design*, 2022, 152: Article No.103378
- [92] Schling E, Wan Z S, Wang H, *et al.* Asymptotic geodesic hybrid timber gridshell [M] //Dörfler K, Knippers J, Menges A, *et al.* *Advances in Architectural Geometry 2023*. Berlin: De Gruyter, 2023: 97-110
- [93] Wang B L, Almaskin M, Pottmann H. Computational design of asymptotic geodesic hybrid gridshells via propagation algorithms[J]. *Computer-Aided Design*, 2025, 178: Article No.103800

- [94] Laccone F, Pietroni N, Cignoni P, *et al.* Bending-reinforced grid shells for free-form architectural surfaces[J]. *Computer-Aided Design*, 2024, 168: Article No.103670
- [95] Becker Q, Kusupati U, Suzuki S, *et al.* Computational design of a kit of parts for bending active structures[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2024, 43(6): Article No.230
- [96] Yorov K, Wang B L, Skopenkov M, *et al.* Solving Euclidean problems by isotropic initialization[OL]. [2025-05-14]. <https://arxiv.org/abs/2506.01726>
- [97] Whiting E, Ochsendorf J, Durand F. Procedural modeling of structurally-sound masonry buildings[C] //Proceedings of the ACM SIGGRAPH Asia Papers. New York: ACM Press, 2009: Article No.112
- [98] Whiting E, Shin H, Wang R, *et al.* Structural optimization of 3D masonry buildings[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2012, 31(6): Article No.159
- [99] Panozzo D, Block P, Sorkine-Hornung O. Designing unreinforced masonry models[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2013, 32(4): Article No.91
- [100] Deuss M, Panozzo D, Whiting E, *et al.* Assembling self-supporting structures[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2014, 33(6): Article No.214
- [101] Miki M, Igarashi T, Block P. Parametric self-supporting surfaces via direct computation of airy stress functions[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2015, 34(4): Article No.89
- [102] Wang Z Q, Song P, Isvoranu F, *et al.* Design and structural optimization of topological interlocking assemblies[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2019, 38(6): Article No.193
- [103] Loing V, Baverel O, Caron J F, *et al.* Free-form structures from topologically interlocking masonries[J]. *Automation in Construction*, 2020, 113: Article No.103117
- [104] Wang Z Q, Song P, Pauly M. MOCCA: modeling and optimizing cone-joints for complex assemblies[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2021, 40(4): Article No.181
- [105] Kao G T C, Iannuzzo A, Thomaszewski B, *et al.* Coupled rigid-block analysis: stability-aware design of complex discrete-element assemblies[J]. *Computer-Aided Design*, 2022, 146: Article No.103216
- [106] Wang Z Q, Liu W J, Wang J W, *et al.* Learning to assemble with alternative plans[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2025, 44(4): Article No.101
- [107] Song P, Fu C W, Goswami P, *et al.* Reciprocal frame structures made easy[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2013, 32(4): Article No.94
- [108] Mellado N, Song P, Yan X Q, *et al.* Computational design and construction of notch-free reciprocal frame structures[M] //Block P, Knippers J, Mitra N J, *et al.* *Advances in Architectural Geometry 2014*. Cham: Springer, 2015: 181-197
- [109] Mesnil R, Douthe C, Baverel O, *et al.* Form finding of nexorades using the translations method[J]. *Automation in Construction*, 2018, 95: 142-154
- [110] Miki M, Mitchell T. Interactive exploration of tension-compression mixed shells[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2022, 41(6): Article No.263
- [111] Vouga E, Hübinger M, Wallner J, *et al.* Design of self-supporting surfaces[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2012, 31(4): Article No.87
- [112] Liu Y, Pan H, Snyder J, *et al.* Computing self-supporting surfaces by regular triangulation[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2013, 32(4): Article No.92
- [113] Ma L, He Y, Sun Q, *et al.* Constructing 3D self-supporting surfaces with isotropic stress using 4D minimal hypersurfaces of revolution[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2019, 38(5): Article No.144
- [114] Ma L, Yao S D, Zheng J M, *et al.* Constructing self-supporting surfaces with planar quadrilateral elements[J]. *Computational Visual Media*, 2022, 8(4): 571-583
- [115] Wei G S, Ma L, Zhou Y F, *et al.* Design and optimization of self-supporting surfaces with arch beams[J]. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2025, 31(7): 4003-4017
- [116] Wang Z Q, Kennel-Maushart F, Huang Y J, *et al.* A temporal coherent topology optimization approach for assembly planning of bespoke frame structures[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2023, 42(4): Article No.144
- [117] Singh M, Schaefer S. Triangle surfaces with discrete equivalence classes[C] //Proceedings of the ACM SIGGRAPH Papers. New York: ACM Press, 2010: Article No.46
- [118] Fu C W, Lai C F, He Y, *et al.* K-set tilable surfaces[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2010, 29(4): Article No.44
- [119] Eigensatz M, Kilian M, Schiftner A, *et al.* Paneling architectural freeform surfaces[C] //Proceedings of the ACM SIGGRAPH Papers. New York: ACM Press, 2010: Article No.45
- [120] Liu Z Y, Zhang Z, Zhang D, *et al.* Modeling and fabrication with specified discrete equivalence classes[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2021, 40(4): Article No.41
- [121] Khan D, Bohak C, Viola I. Dr. KID: direct remeshing and k-set isometric decomposition for scalable physicalization of organic shapes[J]. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2024, 30(1): 705-715
- [122] Wang J L, Wu Z Y, Tian Y Q, *et al.* Modular shape modeling with controllable discrete equivalence class distribution[J]. *Computer-Aided Design*, 2025, 189: Article No.103935
- [123] Zhu T Y, Xu Z H, Liu L G, *et al.* Modeling with discrete equivalence classes of planar quads[J]. *Computers & Graphics*, 2023, 115(C): 404-411
- [124] Liu Y P, Lee T U, Javan A R, *et al.* Reducing the number of different faces in free-form surface approximations through clustering and optimization[J]. *Computer-Aided Design*, 2024, 166: Article No.103633
- [125] Chen R L, Qiu P Y, Song P, *et al.* Masonry shell structures with discrete equivalence classes[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2023, 42(4): Article No.115
- [126] Koronaki A, Shepherd P, Evernden M. Rationalization of free-form space-frame structures: reducing variability in the joints[J]. *International Journal of Architectural Computing*, 2020, 18(1): 84-99
- [127] Liu Y P, Lee T U, Koronaki A, *et al.* Reducing the number of different nodes in space frame structures through clustering and optimization[J]. *Engineering Structures*, 2023, 284: Article No.116016
- [128] Brütting J, Senatore G, Fivet C. Design and fabrication of a reusable kit of parts for diverse structures[J]. *Automation in Con-*

- struction, 2021, 125: Article No.103614
- [129] Zimmer H, Lafarge F, Alliez P, *et al.* Zometool shape approximation[J]. *Graphical Models*, 2014, 76(5): 390-401
- [130] Bi M H, Liu Y P, Xie Y M. Clustering and optimisation of nodes, beams and panels for cost-effective fabrication of free-form surfaces[M] //Xie Y M, Burry J, Lee T U, *et al.* Proceedings of the IASS Annual Symposia 2023. Melbourne: International Association for Shell and Spatial Structures (IASS), 2023: 1-12
- [131] Qiu P Y, Chen R L, Song P, *et al.* Modeling wireframe meshes with discrete equivalence classes[J]. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2025, 31(10): 7998-8011
- [132] Kilian M, Pellis D, Wallner J, *et al.* Material-minimizing forms and structures[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2017, 36(6): Article No.173
- [133] Jiang C G, Tang C C, Seidel H P, *et al.* Design and volume optimization of space structures[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2017, 36(4): Article No.159
- [134] Heinzlmann F. Lightweight Origami structure & daylight modulation[C] //Proceedings of the Symposium of the International Association for Shell and Spatial Structures. Valencia: Universitat Politècnica de València, 2010: 1530-1542
- [135] Wang J, Jiang C, Bompas P, *et al.* Discrete line congruences for shading and lighting[J]. *Computer Graphics Forum*, 2013, 32(5): 53-62
- [136] Jiang C G, Tang C C, Vaxman A, *et al.* Polyhedral patterns[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2015, 34(6): Article No.172
- [137] Vaxman A, Müller C, Weber O. Regular meshes from polygonal patterns[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2017, 36(4): Article No.113
- [138] Vaxman A, Müller C, Weber O. Canonical möbius subdivision[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2018, 37(6): Article No.227
- [139] Peng C H, Pottmann H, Wonka P. Designing patterns using triangle-quad hybrid meshes[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2018, 37(4): Article No.107
- [140] Meekes M, Vaxman A. Unconventional patterns on surfaces[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2021, 40(4): Article No.101
- [141] Pellis D, Kilian M, Dellinger F, *et al.* Visual smoothness of polyhedral surfaces[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2019, 38(4): Article No.31
- [142] Inza V C, Fykouras P, Rist F, *et al.* Designing triangle meshes with controlled roughness[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2024, 43(6): Article No.166
- [143] Konaković M, Crane K, Deng B L, *et al.* Beyond developable: computational design and fabrication with auxetic materials[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2016, 35(4): Article No.89
- [144] Chen T, Panetta J, Schnaubelt M, *et al.* Bistable auxetic surface structures[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2021, 40(4): 1-9
- [145] Panetta J, Isvoranu F, Chen T, *et al.* Computational inverse design of surface-based inflatables[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2021, 40(4): Article No.40
- [146] Ren Y Y, Panetta J, Suzuki S, *et al.* Computational homogenization for inverse design of surface-based inflatables[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2024, 43(4): Article No.87
- [147] Huang Y J, Zhang J Y, Hu X, *et al.* FrameFab: robotic fabrication of frame shapes[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2016, 35(6): Article No.224
- [148] Peng H S, Briggs J, Wang C Y, *et al.* RoMA: interactive fabrication with augmented reality and a robotic 3D printer[C] //Proceedings of the CHI Conference on Human Factors in Computing Systems. New York: ACM Press, 2018: Article No.579
- [149] Huang Y J, Carstensen J, Tessmer L, *et al.* Robotic extrusion of architectural structures with nonstandard topology[M] //Willmann J, Block P, Hutter M, *et al.* Robotic Fabrication in Architecture, Art and Design 2018. Cham: Springer, 2018: 377-389
- [150] Tian R D, Paulos E. Adroid: augmenting hands-on making with a collaborative robot[C] //Proceedings of the 34th Annual ACM Symposium on User Interface Software and Technology. New York: ACM Press, 2021: 270-281
- [151] Huang Y J, Leung P Y V, Garrett C, *et al.* The new analog: a protocol for linking design and construction intent with algorithmic planning for robotic assembly of complex structures[C] //Proceedings of the 6th Annual ACM Symposium on Computational Fabrication. New York: ACM Press, 2021: Article No.9