



中國計算機學會
CHINA COMPUTER FEDERATION

CCF CAD/CG 2025

第**28**届全国计算机辅助设计与图形学学术会议

基于共轭-测地四边对角网的曲面优化设计

李欣烨



同濟大學
TONGJI UNIVERSITY

王慧*



西安交通大學
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY



计算机辅助设计与图形学
computer Aided Design and computer Graphics



山东大学
SHANDONG UNIVERSITY



山東財經大學
Shandong University of Finance and Economics



山东工商学院
Shandong Technology and Business University



研究背景



英国大英博物馆



中国辰山植物园

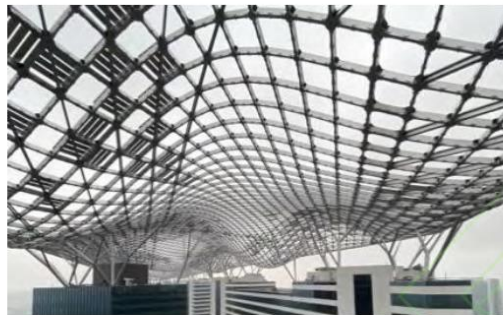


卢森堡国家体育与文化中心

(a) 采用三角形网格的空间网格建筑



澳大利亚 Chadstone 购物中心



中国拉斐尔云廊



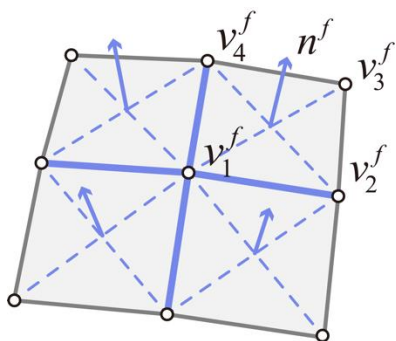
德国曼海姆多功能厅

(b) 采用四边形网格的空间网格建筑

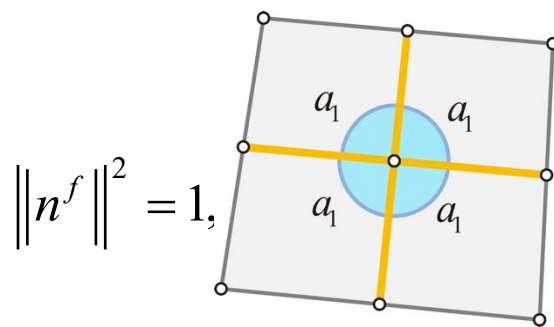
网格类型	平面性	结构稳定性	节点复杂程度	网格视觉通透性	网格光滑化优化难度
三角形网格	具备	强	高	低	大
四边形网格	需优化	弱	低	高	小

互为对角共轭-测地四边网

互为对角共轭-测地四边对交网

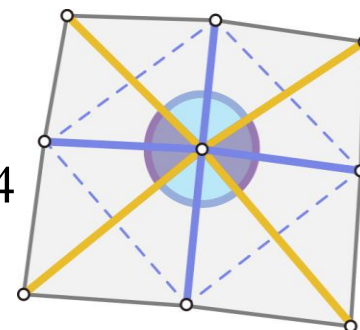


Q-net具有平面四边面

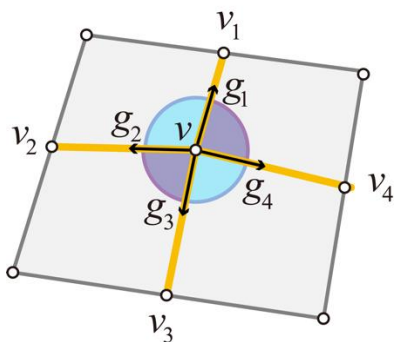


DOG网

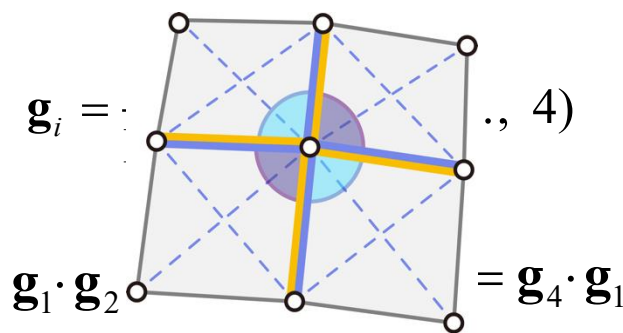
$$\|n^f\|^2 = 1, \quad 0, \quad (i = 2, 3, 4)$$



Q-net的对角网为G-net

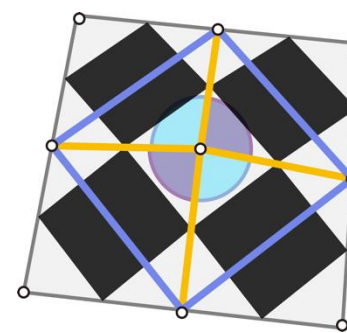


G-net对角相等



Voss网

$$g_i = \dots, 4) \\ g_1 \cdot g_2 = g_4 \cdot g_1$$



G-net的对角网为Q-net

总能量函数

$$E = E_{Qnet} + E_{Gnet} + \omega_{fair} E_{fair} + \omega_{self} E_{self} + \omega_{drag} E_{drag} + \omega_{ref} E_{ref} + \omega_{bdGlide} E_{bdGlide} \rightarrow \min$$

$$E_{Qnet} = \sum_{f=1}^{|F|} \sum_{i=2}^4 [n^f \cdot (v_i^f - v_{i-1}^f)]^2 + \sum_{f=1}^{|F|} (n^f \cdot n^f - 1)^2$$

$$E_{Gnet} = \sum_{i=1}^{|V|} [(g_{i1} \cdot g_{i2} - g_{i3} \cdot g_{i4})^2 + (g_{i2} \cdot g_{i3} - g_{i4} \cdot g_{i1})^2] + \sum_{i=1}^{|V|} \sum_{j=1}^4 \left(g_{ij} - \frac{\mathbf{v}_{ij} - \mathbf{v}_i}{\mathbf{P} \mathbf{v}_{ij} - \mathbf{v}_i \mathbf{P}} \right)^2$$

$$E_{fair} = \sum_{i \in polyline} (2v_i - v_{iL} - v_{iR})^2$$

$$E_{self} = \sum_{i=1}^{|V|} (v_i - v_{ipre})^2$$

$$E_{drag} = (v_p - v_{pd})^2$$

$$E_{ref} = \sum_{i=1}^{|V|} [(v_i - p_i) \cdot n^{ki}]^2$$

$$E_{bdGlide} = \sum_{i=1}^{|V|} [(v_i - p_i) \times e_1]^2$$



优化算法-算法步骤

输入：初始网格 X_0 ，最大迭代次数 $\max_iter$ ，收敛阈值 ε ；

Step1. 读取初始网格，以半边数据结构的形式对其进行储存；

Step2. 对三个权重因子 w_{fair} ， w_{app} ， w_{self} 进行赋值；

Step3. 若迭代次数小于 $\max_iter$ 或余项大于 ε 时，执行

Step3.1. 把硬约束的方程组在 X_n 处一阶泰勒展开，得到

$$\varphi_i(X) \approx \varphi_i(X_n) + \nabla \varphi_i(X_n)^T (X - X_n) = 0, i = 1, \dots, N.$$

把它表示成矩阵形式

$$HX - r = 0, \text{ 其中 } H = \begin{bmatrix} \nabla \varphi_1(X_n)^T \\ \vdots \\ \nabla \varphi_N(X_n)^T \end{bmatrix}, r = \begin{bmatrix} -\varphi_1(X_n) + \nabla \varphi_1(X_n)^T X_n \\ \vdots \\ -\varphi_N(X_n) + \nabla \varphi_N(X_n)^T X_n \end{bmatrix}$$

Step3.2. 给 $HX - r = 0$ 加上正则项，即考虑光滑约束、近似约束、解空间约束，变为

$$\|HX - r\|^2 + w_{\text{fair}} \|K_1 X - s_1\|^2 + w_{\text{app}} \|K_2 X - s_2\|^2 + w_{\text{self}} \|X - X_n\|^2 \rightarrow \min$$

Step3.3. 利用Cholesky分解上一步的式子，求解方程

$$(H^T H + W_{\text{fair}} K_1^T K_1 + W_{\text{app}} K_2^T K_2 + \varepsilon^2 I) X = H^T r + W_{\text{fair}} K_1^T s_1 + W_{\text{app}} K_2^T s_2 + W_{\text{self}} X_n$$

记求出的解为 X^* ；

Step3.4. 令 $X_{n+1} = X^*$ ，迭代次数 $n=n+1$ ；

Step4. 转回Step2；

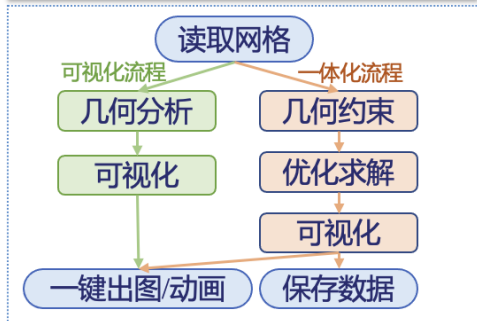
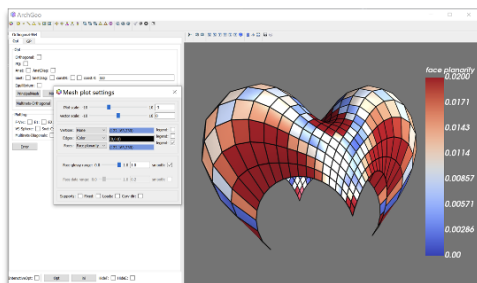
输出：最终优化网格 $X=X_n$ 。



优化算法-开发平台ArchGeo

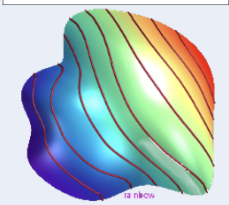
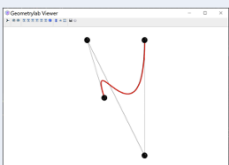
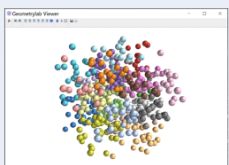


几何可视化与几何优化的一体化优化设计平台



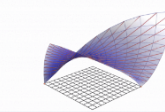
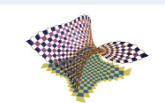
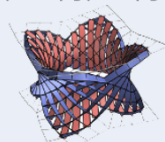
几何可视化

- ✓ 点
 - 控制点
 - 格点
 - 点云...
- ✓ 线
 - 多边形
 - Bezier曲线
 - B-spline曲线
 - 等值线
 - 力图...
- ✓ 面
 - 网格
 - 参数曲面
 - 支撑结构
 - 高斯曲率
 - 平均曲率...
- ✓ 矢量场



几何优化

- ✓ 任何流形和可定向网格
- ✓ 特殊曲线网
 - 共轭网、主法曲率网、A-网、G-网、S-网
 - 混合三角网
 - 主应力结构...
- ✓ 特殊条带面
 - 从切条带
 - 无挠率支撑结构
 - 渐近条带、测地条带、伪测地条带
 - 可展条带...
- ✓ 曲面参数化
 - 展平
 - 等距映射、共形映射
 - 交叉参数化...
- ✓ 交互编辑设计
 - 拖拽、固定、滑动 点/线/面
 - 近似给定曲面

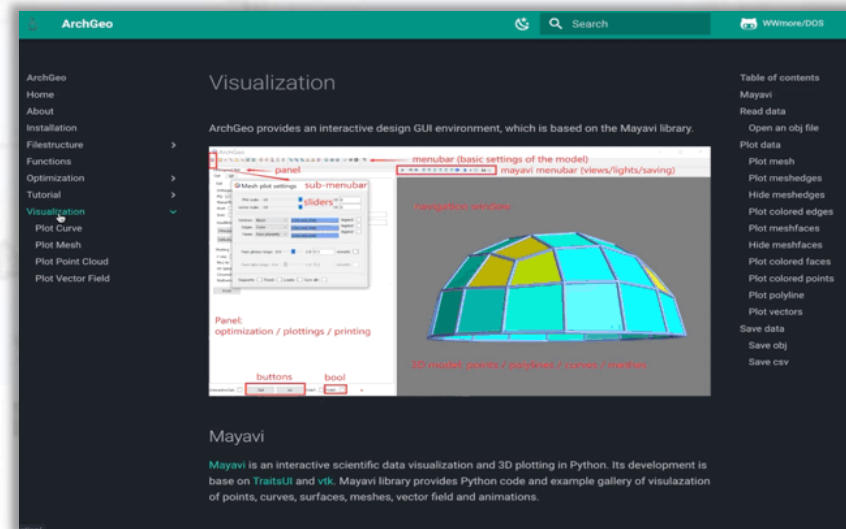


Python语言编写

包含200多个几何处理函数,如提取棋盘格面和等参线、绘制主法曲率方向和高斯曲率等

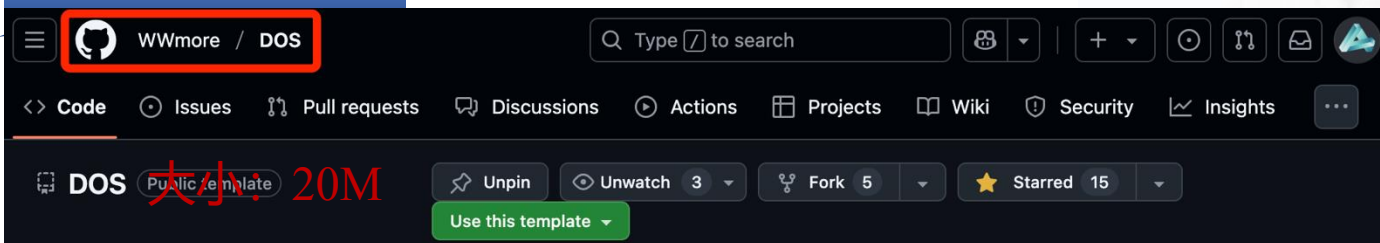
说明文档网页

安装流程、程序架构、函数介绍、可视化、优化算法、教学案例 (A-net, PC-net, PS-net, S-net) 等核心内容



Github项目

<https://github.com/WWmore/DOS>



ArchGeo说明文档网页

<https://www.huiwang.me/mkdocs-archgeo/>

方案一

- 当初始网格的四边面更接近于平面时
($E_{Qnet} \leq E_{Gnet}$)
 - 如来自曲面的主法曲率网
- 优先选取**QDG优化**
 - 优化控制网为Q-net
 - 优化对角网为G-net

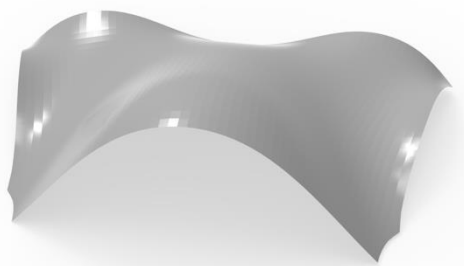


a.参考曲面

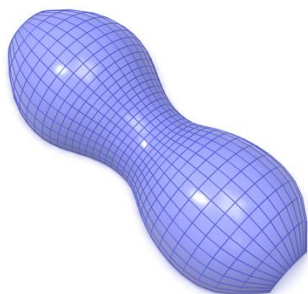


方案二

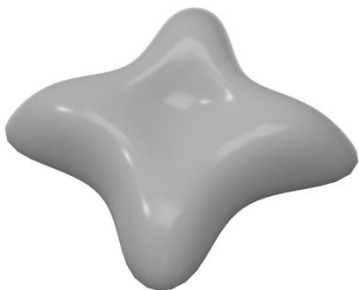
- 当初始网格更接近测地网格时
($E_{Qnet} \geq E_{Gnet}$)
 - 如来自可展曲面的正交测地网,
- 优先选取**GDQ优化**
 - 优化控制网为G-net
 - 优化对角网为Q-net



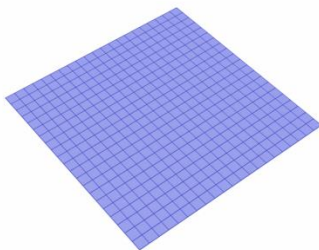
初始曲面



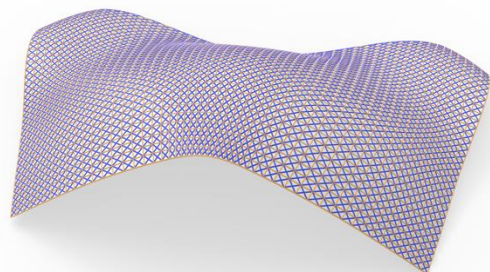
初始曲面



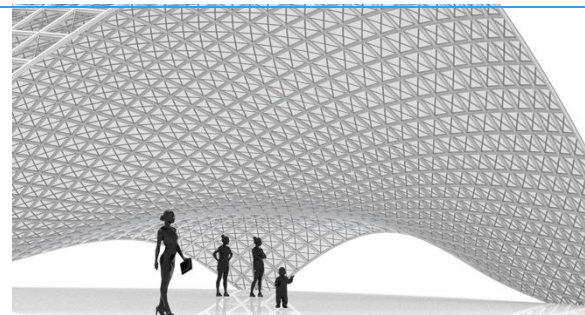
参考曲面



初始共轭网



GDQ优化后的曲面4-网



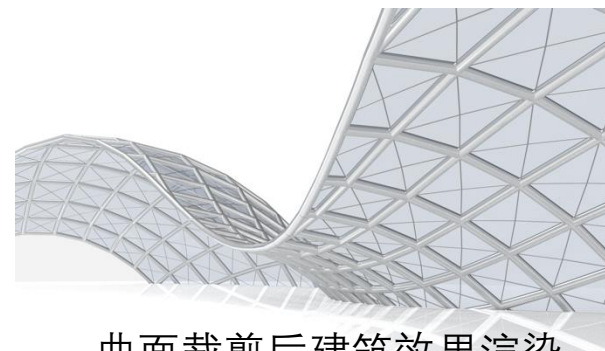
建筑效果渲染

屈曲特征值

1.12



QDG优化后的曲面4-网

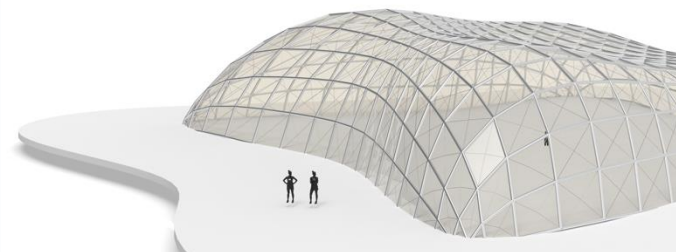


曲面裁剪后建筑效果渲染

1.13



QDG优化后的曲面4-网



建筑效果渲染

1.13



结论

- 针对自由曲面四边形网格在设计与施工中面临的两大问题——非平面性与结构稳定性不足，提出了**互为对角的共轭-测地四边对角网**的新结构形式，并配套了优化设计方法与优化策略；
- 依托Guided-Projection求解算法，结合几何约束与交互设计约束**建立优化算法框架，优化速度达到0.1 秒量级**，满足工程实时性需求；
- 该方法既能保证平面单元的施工经济性，又能通过沿测地线布置的预张力索实现最优传力路径，从而**显著提升结构稳定性**。这为复杂自由曲面建筑的几何—结构一体化设计提供了一种全新的范式。



ArchGeo

姓名：王慧

团队：应用几何研究组（AGG）

博导：计算数学、应用数学

邮箱：huiwang@xjtu.edu.cn



个人主页

